DEPARTAMENTO DE XEOMETRÍA
E TOPOLOXÍA

MAXWELL'S EQUATIONS REVISITED

CURSO: Maxwell's equations revisited = Divagando(*) sobre las ecuaciones de Maxwell

(*) Divagar (del diccionario de la lengua española):
(1) Separarse del asunto de que se trata.
(2) Hablar o escribir sin concierto ni propósito fijo y determinado.

Adolfo Sánchez Valenzuela
Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.
CIMAT

Datas: 6, 7, 8 e 9 de xuño de 2016
Horario: de 12:00 a 13:30
Lugar: Aula 9 da Facultade de Matemáticas

INSCRICIÓN

A inscrición farase por correo elctrónico enviando, antes do **4 de xuño**, unha mensaxe á dirección electrónica **elena.vazquez.abal@usc.es** co asunto **Curso Maxwell**, coa seguinte información:
APELIDOS:
NOME:
ESTUDOS REALIZADOS:
e-mail de contacto:

web: http://webspersoais.usc.es/persoais/elena.vazquez.abal/Maxwell/index.html

Nas sesións controlarase a asistencia co motivo de entregar ao remate do curso un certificado de asistencia.

ORGANIZACIÓN:

GI-2136-Grupo de investigación en Álxebra e Xeometría.

Supported by projects EM2014/009, GRC2013-045 and MTM2013-41335-P with FEDER funds (Spain)

Instituto de Matemáticas, IMAT.

PROGRAMA (O idioma utilizado no curso será o castelán)

La intención es "explorar en público" la posibilidad de plantear las ecuaciones de Maxwell en un "ambiente propicio para la supersimetría". Se pretenden revisar resultados básicos bien conocidos, como el Teorema de Helmholtz o la versión "tipo Dirac" de las ecuaciones de Maxwell empleando el álgebra de Clifford del grupo de Lorentz, sobre la base de un modelo homogéneo en la clase conforme del espacio-tiempo de Minkowski. La presentación de los temas necesarios pretende ser autocontenida.

1. Las Ecuaciones de Maxwell bajo el marco del Teorema de Helmholtz

Se expone el Teorema de Helmholtz que dice que si uno conoce la divergencia y el rotacional de un campo vectorial F definido en algún subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$, uno puede determinar el campo vectorial. La solución al problema se reduce a saber resolver la Ecuación de Poisson que dice que, "bajo ciertas condiciones", si uno conoce el Laplaciano de una función en un abierto $\mathbb{R}^3$, uno puede determinar la función. Esto sirve de motivación para presentar la versión "más familiar" de las ecuaciones de Maxwell (ie, la versión difundida por los libros de cálculo de muchas variables o de electromagnetismo) y se ilustra una "metodología para resolverlas" - basada en el Teorema de Helmholtz. El nivel de la presentación pretende ser elemental y suficientemente autocontenido.

2. El Teorema de Descomposición de Hodge y la "libertad de 'gauge' "

Se revisa el Teorema de Helmholtz a la luz del lenguaje de formas diferenciales definidas en algún subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ enfatizando la libertad de elección de los "campos potenciales" en términos de los cuales se puede determinar un campo vectorial F una vez que se conocen su divergencia y su rotacional. Los físicos nos enseñaron a generalizar esta "libertad de elección" (gauge freedom) y alrededor de los años 1950-1960 se sistematizó su estudio y entendimiento para dar lugar a lo que hoy conocemos como "Ecuaciones de Yang-Mills". Se emplea el ejemplo planteado en el lenguaje de las formas diferenciales para ver en qué sentido el Teorema de Helmholtz es un caso particular del Teorema de Descomposición de Hodge. No se abundará en el Teorema de Hodge, sino en la "libertad de 'gauge' " de las Ecuaciones de Maxwell planteadas en términos de la diferencial y de la codiferencial de formas diferenciales definidas en un subconjunto abierto del espaciotiempo de Minkowski. Con el fin de hacer autocontenida la exposición, se puede hacer un paréntesis para revisar el operador de Hodge y sus propiedades (al menos en $\mathbb{R}^3$ con la geometría ortogonal y en $\mathbb{R}^4$ con la geometría de Lorentz).

3. Las Ecuaciones de Maxwell en el lenguaje del álgebra de Clifford asociada al espaciotiempo de Minkowski

Usando el álgebra de Clifford asociada al grupo de transformaciones de Lorentz en el espaciotiempo de Minkowski, M, y escogiendo apropiadamente un isomorfismo entre dicha álgebra y el álgebra exterior, las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir en la forma $DF = 4\pi J$, siendo D un operador del tipo de Dirac (ie, un operador que 'funciona como raíz cuadrada' del operador de onda), F el campo electromagnético y J 'las fuentes' del campo. En particular, el campo F es una función con dominio M que toma valores en el álgebra de Lie $sl(2, \mathbb{C})$ del grupo de Lorentz $\mathbb{C}^3$ (espacio vectorial complejo de dimensión 3, o espacio correspondiente a un espín s que satisface $2s+1=3$) y que puede escribirse en la forma $F = E + iB$, siendo i la 'representación obvia' de una 'estructura compleja natural' que existe en el álgebra de Clifford y E y B se pueden identificar con los campos eléctrico y magnético, respectivamente. Con el fin de hacer autocontenida la exposición, se puede hacer un paréntesis para revisar lo relativo a las álgebras de Clifford (al menos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con la geometría ortogonal y en $\mathbb{R}^4$ con la geometría de Lorentz).

4. Buscando un entorno SUSY (¿sexy?) para las Ecuaciones de Maxwell

En términos de formas diferenciales definidas en el espaciotiempo de minkowski, es posible reescribir las ecuaciones de Maxwell involucrando simultáneamente 1-formas, 2-formas y 3-formas y empleando el operador tipo Dirac D. Se hace ver que dicho operador puede entenderse como un "elemento impar" de una álgebra de Lie ortosimpléctica que puede asociarse de manera natural al escenario de las Ecuaciones de Maxwell, tan solo por la existencia de la métrica de Minkowski y de su operador de Hodge. El planteamiento pretende ser autocontenido, para lo cual se puede hacer un paréntesis con el fin de revisar lo que es "una supergeometría ortosimpléctica en un superespacio vectorial".

Adolfo Sánchez Valenzuela Obtivo a licenciatura e o máster en física na Facultad de Ciencias de la UNAM e o doutoramento no Departamento de Matemáticas da Harvard University. Foi investigador do CIMAT, Coordinador de Formación Académica, Director da Facultad de Matemáticas da Universidad de Guanajuato e Director General del CIMAT. Actualmente é Director da Unidad Mérida do CIMAT. É membro da Academia Mexicana de Ciencias desde 1993 e foi coordinador da Sección de Matemáticas de dita agrupación de 2004 a 2012. Foi membro de diferentes comisións dictaminadoras na UNAM, así como de diversos comités científicos na Academia Mexicana de Ciencias e no Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, ademais de ter participado nos comités do Premio México e do Premio Nacional de Ciencias. Os seus intereses matemáticos sempre estiveron inspirados na física. As súas principais contribucións teñen lugar no campo da teoría das supervariedades e a supersimetría.