Topoloxía dos espacios euclidianos

Seminario online

Prof. Xosé M. Masa Vázquez

axuda

$a)$ Calculade a unión e a intersección das seguintes familias de subconxuntos de $\mathbb{R}$:

$$\{[-n,n], n \in \mathbb{N}\}; \qquad \{(0,1/n), n \in \mathbb{N}\}.$$

$b)$ Considerade os seguintes subconxuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$E_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1/n\}$$

$$L_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > r\}$$

Calculade a unión e intersección das familias

$$\{E_n, n \in \mathbb{N}\}, \qquad \{L_r, r \in (0,+\infty)\}.$$

Para unha primeira axuda pousa aqui o rato

axuda

Debuxade os seguintes subconxuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 2x + 1\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - 3| + |y + 2| \leq 1\}$$

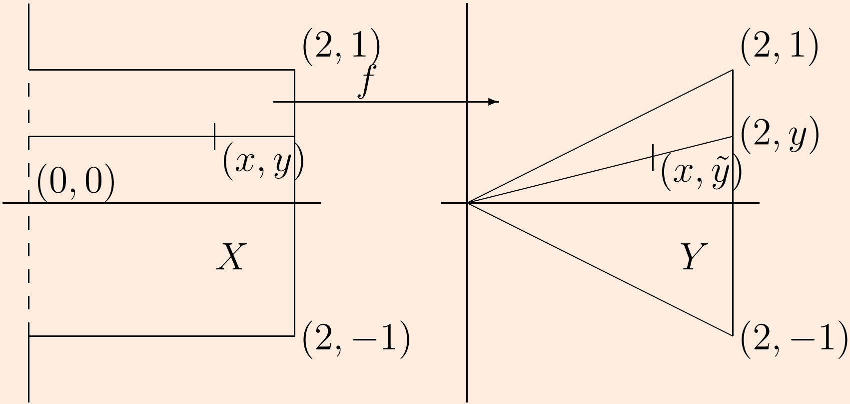
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x + 1|, |y - 2|\} \leq 2\}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1/n)^2 + y^2 = 1/n^2, n = 1, 2, 3, 4\}.$$

Para unha primeira axuda

pousa aqui o rato

Expresade analiticamente os seguintes subconxuntos X e Y de $\mathbb{R}^2$, e escribide a función $f(x,y) = (x, \tilde{y})$ entre eles que se indica no debuxo:



Para unha primeira axuda

pousa aqui o rato

Sexan $x, y \in \mathbb{R}^p$. Demostrade as seguintes desigualdades:

$$| \| x \| - \| y \| | \leq \| x \pm y \| \leq \| x \| + \| y \|$$

Para unha primeira axuda

pousa aqui o rato

axuda

Estudiade o carácter aberto ou pechado dos seguintes subconxuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x/n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-3| \leq 1\}$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{máx}\,\{|x+1|, |y-2|\} < 2\}$$

Para unha primeira axuda

pousa aqui o rato

Considerade as seguintes familias de subconxuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$E_q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > q\}, \quad q \in \mathbb{Q}, \quad 1 \leq q\,;$$

$$F_q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < q\}, \quad q \in \mathbb{Q}, \quad q \geq \sqrt{2}\,.$$

Estudiade se a súa intersección é un conxunto aberto ou pechado.

Para unha primeira axuda

pousa aqui o rato

Demostrade que no espacio $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ a sucesión

$$\{(1/n, 1 + 2/n)\}$$

é de Cauchy. É converxente?

Para unha primeira axuda

pousa aqui o rato

axuda

Utilizando o criterio de converxencia de sucesións, demostrade que toda recta en $\mathbb{R}^2$ é un conxunto pechado.

Para unha primeira axuda

pousa aqui o rato

Sexa $\{x_n\}$ unha sucesión en X, converxente a un punto x_0. Demostrade que o conxunto $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ é pechado.

Para unha primeira axuda

pousa aquí o rato

Sexa $X \subset \mathbb{R}^p$ un espacio, $f\colon X \to \mathbb{R}$ unha función continua. Demostrade que se x_0 é un punto de X tal que $f(x_0) > 0$, daquela existe unha bola aberta de centro x_0 en X tal que f toma nela valores estrictamente positivos.

Para unha primeira axuda

pousa aqui o rato

axuda

Sexa

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \geq x^2 + 1 \text{ ou } xy = 0\}.$$

Estudiade a continuidade da función $f : X \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x, 2y) & \text{se} \quad xy > 0 \\ (0,0) & \text{se} \quad xy = 0 \\ (x,y) & \text{se} \quad xy < 0 \end{cases}$$

Para unha primeira axuda

pousa aqui o rato

axuda

Sexa $X \subset \mathbb{R}^p$ un espacio, $f\colon X \to \mathbb{R}$ unha función. Demostrade que f é continua sse os conxuntos $f^{-1}((-\infty, a))$ e $f^{-1}((b, -\infty))$ son abertos, calquera que sexan os números reais a e b.

Sexan f e g dúas funcións con dominio e rango $\mathbb{R}$. Supoñamos que cumpren

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad g(x+y) = g(x)g(y).$$

Demostrade que son continuas sse o son no punto 0.

Para unha primeira axuda

pousa aqui o rato

Axudándose do concepto de continuidade, demostrade que o conxunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(1 + y^5) = 1\}$$

é pechado.

Para unha primeira axuda

pousa aqui o rato

Sexa $E = \mathbb{R} - \{-1\}$, $f, g : E \to \mathbb{R}$ as funcións dadas por

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}; \quad g(x) = \frac{1}{x^3+1}.$$

Existen extensións de f ou g a $\mathbb{R}$? En caso de resposta afirmativa, construíde unha extensión. É única?

Para unha primeira axuda pousa aqui o rato

volver

Comprobemos a igualdade

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0,1/n) = \emptyset\,.$$

Que un punto pertenza á intersección siñifica que pertence a todos os conxuntos $(0,1/n)$. Trátase de ver, pois, que calquera que sexa $x\in\mathbb{R}$ existe un enteiro natural n tal que

$$x \notin (0,1/n)\,.$$

Ou sexa, que dado x, existe un enteiro n tal que

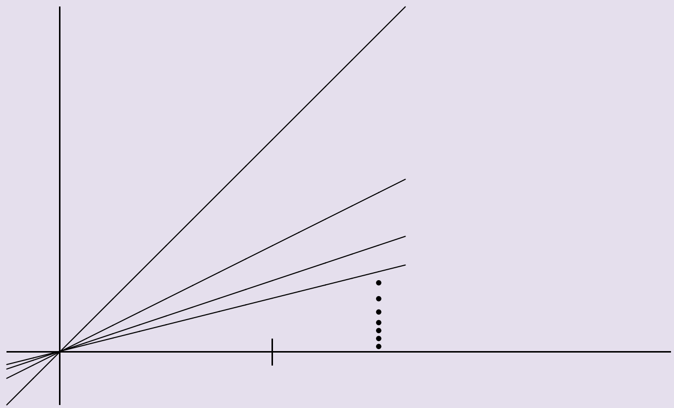
$$1/n \le x\,.$$

Isto é unha maneira de expresar a propiedade de $\mathbb{R}$ de ser un corpo ordenado **arquimediano.**

volver

Vexamos que A non é aberto. Abonda escoller un punto de A no que non se verifique a definición. Por exemplo, o punto $(0,0)$. Na bola de centro o punto $(0,0)$ e raio r está o punto $(0,r/2)$, que non pertence a A.

Vexamos agora que $\mathbb{R}^2 - A$ tampouco é un conxunto aberto. Tomemos o punto $(1,0) \in \mathbb{R}^2 - A$ e unha bola de centro nel e raio r. Sempre hai un enteiro natural n tal que o punto $(1,1/n)$, que pertence á recta pola orixe de declive $1/n$, permite concluír.



volver

Sexa

$$ax + by + c = 0$$

a ecuación da recta L. Que o punto (x_n, y_n) pertenza a L significa

$$ax_n + by_n + c = 0\,.$$

Trátase de concluir que tamén

$$ax_0 + by_0 + c = 0\,.$$

volver

Dedúcese da condición do enunciado, do feito de que, para $a < b$,

$$(-\infty, a) \bigcap (b, +\infty) = (a, b)$$

e do **Teorema 3.5-3.**

volver

A condición de ser U, V e W abertos pódese deducir utilizando funcións continuas auxiliares. Por exemplo, a función de X en $\mathbb{R}$ que leva (x, y) a $x \cdot y$, para os dous primeiros.

A continuidade das restriccións segue do feito de vir definidas por operacións aritméticas.

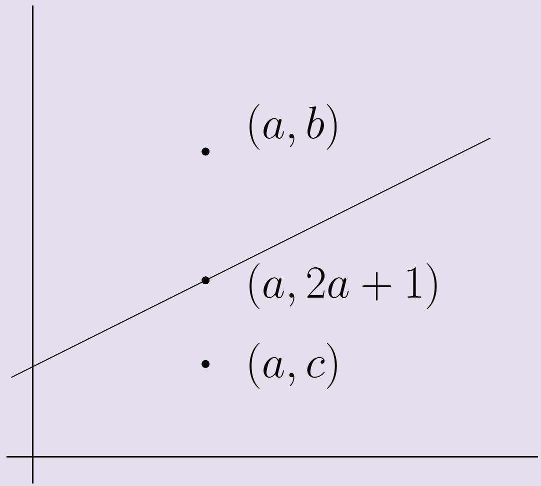
Se $|y| > 1$, os puntos $(\frac{\sqrt{|y|-1}}{n}, y)$ están en X e a sucesión que determinan converxe a $(0, y)$.

Para $|y| = 1$, pódense tomar as sucesións $((1/n, 1 + 1/n^2))$, se $y = 1$, ou $((1/n, -1 - 1/n^2))$, se $y = -1$.

Debuxade os puntos das sucesións!

volver

Tracemos a recta $y = 2x + 1$.



Fixada unha abscisa a, os puntos do conxunto A con esa abscisa son aqueles (a, b) con $b \geq 2a + 1$. Así, o conxunto A está formado polos puntos que están por riba da recta.