Topoloxía dos espacios euclidianos

Manual online

Prof. Xosé M. Masa Vázquez
DEPARTAMENTO DE XEOMETRÍA E TOPOLOXÍA
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice Xeral

1 Os espacios euclidianos

O espacio euclidiano é o obxecto matemático que mellor se corresponde (en dimensións baixas) coa intuición primitiva de espacio físico. É o marco no que Euclides elaborou a primeira formalización dunha xeometría, ao escribir o primeiro tratado matemático deductivo, os *Elementos*, e del toman o nome. Neste capítulo, ademais de definir e estudiar a estructura que o caracteriza, introdúcense os elementos básicos para o seu tratamento topolóxico.

Imos traballar no espacio vectorial $\mathbb{R}^p$. Se consideramos dous elementos,

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \quad \text{e} \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)\,,$$

expresados en función das súas coordenadas cartesianas, o vector suma é

$$x + y \;=\; (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2, \ldots,\, x_p + y_p)\,.$$

Se $a \in \mathbb{R}$ é un escalar, o vector producto de a por x ten coordenadas

$$a \cdot x \;=\; (a \cdot x_1,\, a \cdot x_2, \ldots,\, a \cdot x_p)\,.$$

O noso punto de partida será o espacio vectorial $\mathbb{R}^p$ provisto da súa *estructura euclidiana*, ou sexa, do *producto escalar* (ou *interno*)

$$\boxed{\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^p x_i y_i \ .} \tag{1}$$

Sexan $x, y \in \mathbb{R}^p$, $a \in \mathbb{R}$. O producto escalar é unha función

$$\langle\ ,\ \rangle \colon \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$$

coas seguintes propiedades:

$$\begin{array}{ll} I & \langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \\ & \langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \\ & \langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle = \langle x, ay\rangle \end{array}$$

$$II \quad \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$$

$$III \quad \langle x, x\rangle = 0 \quad \text{sse} \quad x = 0$$

$$IV \quad \langle x, x\rangle \geq 0$$

O producto escalar permite definir a *norma* do vector x,

$$\boxed{\parallel x \parallel = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{p} x_i^2}\,.} \tag{2}$$

Lema 1.1 *Desigualdade de Cauchy-Schwarz:*

$$\boxed{\mid \langle x, y\rangle \mid \leq \parallel x \parallel . \parallel y \parallel ,} \tag{3}$$

onde $x, y \in \mathbb{R}^p$.

$$\boxed{\textstyle\sum_{i=1}^{p} \mid x_i . y_i \mid \leq \parallel x \parallel . \parallel y \parallel \;.} \tag{4}$$

Lema 1.2 *Sexan* $x, y \in \mathbb{R}^p,\ a \in \mathbb{R}$. *Verifícase:*

1. $\parallel x \parallel \geq 0$, *e* $\parallel x \parallel = 0$ *sse* $x = 0$
2. $\parallel ax \parallel = |a| . \parallel x \parallel$
3. $\parallel x + y \parallel \leq \parallel x \parallel + \parallel y \parallel$

As dúas primeiras propiedades enunciadas son inmediatas. A terceira é a *desigualdade de Minkowski* ou *desigualdade triangular.*

A partir do producto escalar pódense medir o *ángulo* entre dous vectores, mediante a fórmula

$$\langle x, y \rangle = \| x \| \, . \, \| y \| \, . \cos(x, y),$$

e a *distancia* entre dous puntos.

Definición 1.3 Chamamos *distancia euclidiana* entre dous puntos x e y de $\mathbb{R}^p$, e a denotamos por $d(x, y)$, á norma de $x - y$,

$$\boxed{d(x, y) = \| x - y \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} (x_i - y_i)^2}\,,} \tag{5}$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_p)$ e $y = (y_1, \ldots, y_p)$.

A seguinte proposición enuncia as propiedades características da distancia. A terceira é coñecida como *desigualdade triangular*, é consecuencia da desigualdade de Minkowski.

Proposición 1.4 *A distancia euclidiana ten as seguintes propiedades:*

$$\boxed{\begin{array}{l} d(x, y) \geq 0, \quad \text{e} \quad d(x, y) = 0 \quad \text{sse} \quad x = y \\[2ex] d(x, y) = d(y, x) \\[2ex] d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \end{array}} \tag{6}$$

A seguinte propiedade denomínase *identidade do paralelogramo*. Afirma que a suma dos cadrados das lonxitudes das diagonais dun paralelogramo é igual á suma dos cadrados das lonxitudes dos lados.

Proposición 1.5 *Sexan* $x, y \in \mathbb{R}^p$*. Verifícase:*

$$\boxed{\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2)\,.} \tag{7}$$

Definición 1.6 Chámase *bola aberta* en $\mathbb{R}^p$ de *centro* x e *raio* r ao conxunto de puntos que distan de x menos que r, e se denota por $B_p(x,r)$,

$$\boxed{B_p(x,r) \;=\; \{y \in \mathbb{R}^p \mid d(x,y) < r\}\,.}$$

Analogamente, definimos *bola pechada* como

$$\boxed{B_p[x,r] \;=\; \{y \in \mathbb{R}^p \mid d(x,y) \leq r\}\,.}$$

Definición 1.7 Un conxunto A en $\mathbb{R}^p$ dise *limitado* se esta contido nalgunha bola,

$$\boxed{\exists B_p(x,r) \text{ tal que } A \subset B_p(x,r)\,.}$$

Definición 1.8 Sexan A e B dous subconxuntos de $\mathbb{R}^p$. Chámase *distancia entre os conxuntos* A e B, e se denota $d(A,B)$, ao número

$$\boxed{d(A,B) \;=\; \inf\{d(x,y),\, x\in A, y\in B\}\,.}$$

Lema 1.9 *Dado un conxunto A e puntos x,y en $\mathbb{R}^p$, cúmprese*

$$\boxed{|d(x,A)-d(y,A)| \;\leq\; d(x,y)\,.}$$

Definición 1.10 Sexa A un conxunto non baleiro en $\mathbb{R}^p$. Chámase *diámetro* de A, e se denota $\delta(A)$, ao número

$$\boxed{\delta(A) \;=\; \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}\,,}$$

cando existe. Se tal supremo non existe, dise que o diámetro é infinito, e escríbese

$$\delta(A) = \infty\,.$$

Convimos en dicir que o diámetro do conxunto baleiro é 0.

Os conceptos que imos considerar agora son a base da formalización moderna da topoloxía, alicerces establecidos contra os anos 13 deste século. É unha forma menos directa ou intuitiva que a que se obtén a partir do concepto de límite ou converxencia, utilizado no estudio de funcións dunha variábel real e que nós consideraremos de contado, pero que resulta, como teremos ocasión de comprobar, moito máis versátil.

Definición 1.11 Un subconxunto U de $\mathbb{R}^p$ é *aberto* se para todo punto de U existe unha bola aberta de centro o punto completamente contida en U,

$$\boxed{x \in U \;\Rightarrow\; \exists r_x > 0 \mid B_p(x, r_x) \subset U\,.} \tag{8}$$

Definición 1.12 Dado $X \subset \mathbb{R}^p$, un punto $x \in X$ e un número real positivo r, chamaremos *bola aberta* de centro x e raio r en X ao conxunto

$$\boxed{B_X(x,r) = B_p(x,r) \cap X.} \tag{9}$$

Diremos que un conxunto $U \subset X$ é aberto en X se para cada punto de U existe unha bola aberta en X de centro o punto completamente contida en U.

Cando traballemos en X e non en todo $\mathbb{R}^p$, falaremos do *espacio* X, para indicar que consideramos abertos relativamente a X. Cando se quere enfatizar que se trata de abertos en X e non en $\mathbb{R}^p$, aos abertos en X se lles dirá *abertos relativos*.

En ocasións traballaremos cun espacio X e outro E, con $E \subset X$. Para nos referir brevemente a esta situación, diremos que E é un *subespacio* de X. Por exemplo, se traballamos ao tempo no espacio X, con $X \subset \mathbb{R}^p$, e tamén en $\mathbb{R}^p$, normalmente nos referiremos a X como subespacio de $\mathbb{R}^p$.

Teorema 1.13 *Os conxuntos abertos verifican as seguintes propiedades:*

1. *O espacio total X é un conxunto aberto.*
2. *O conxunto baleiro $\emptyset$ é aberto.*
3. *Se $\{U_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ son conxuntos abertos, a súa unión*

$$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

   é un conxunto aberto.
4. *Se U e V son conxuntos abertos, a súa intersección $U \cap V$ é un conxunto aberto.*

Corolario 1.14 *Un conxunto é aberto sse é unión de bolas abertas.*

Proposición 1.15 *Un conxunto $U \subset X$ é aberto en X sse existe un conxunto V aberto en $\mathbb{R}^p$ tal que $U = V \cap X$.*

1.16 Se $E \subset X$ é un subespacio de X, da caracterización dada na proposición séguese que os abertos relativos en E son precisamente aqueles conxuntos $U \subset E$ para os que existe un aberto V en X tal que $U = V \cap E$.

Definición 1.17 Chámase *conxunto pechado* en X a todo conxunto complementar de un aberto.

Proposición 1.18 *Os conxuntos pechados teñen as seguintes propiedades:*

1. *O conxunto baleiro $\emptyset$ é pechado.*

2. *O espacio total X é un conxunto pechado.*

3. *Se $\{F_\lambda,\, \lambda \in \Lambda\}$ son conxuntos pechados, a súa intersección*

$$F = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$$

   é un conxunto pechado.

4. *Se F e G son conxuntos pechados, a súa unión $F \cup G$ é un conxunto pechado.*

Proposición 1.19 *Un subconxunto F de X é pechado sse existe un subconxunto pechado G de $\mathbb{R}^p$ tal que $F = G \cap X$.*

2 Converxencia

Se o concepto de conxunto aberto é a base da formalización moderna da topoloxía conxuntista, os conceptos de límite e de converxencia foron o punto de partida. De feito, para moitos matemáticos de principios do século XX, a idea de *límite dunha sucesión* era a noción topolóxica fundamental. Para nós vai seguir xogando un papel central, especialmente en cálculos concretos. Máis adiante veremos que, para certos espacios abstractos, a converxencia de sucesións non abonda.

Definición 2.1 Unha *sucesión* nun espacio X é unha aplicación de $\mathbb{N}$ en X,

$$\boxed{s\colon \mathbb{N} \longrightarrow X\,.}$$

Normalmente designaremos por x_n a imaxe de n, $x_n = s(n)$, e denotaremos a sucesión por $\{x_n\}$. Así, ao escribirmos $\{x_n\}$ sobrentendemos que o índice n percorre o conxunto $\mathbb{N}$. En todo caso, esta notación non debe conducir a identificar a sucesión co conxunto imaxe, formado polos puntos x_n. Na sucesión importan os puntos e importan os seus nomes.

Definición 2.2 Unha sucesión $\{x_n\}$ no espacio X *converxe* a un punto x_0 de X se para cada bola aberta de centro x_0, digamos, $B_X(x_0, r)$, existe un enteiro n_0 tal que para $n \geq n_0$ tense $x_n \in B_X(x_0, r)$.

Diremos, neste caso, que $\{x_n\}$ é unha *sucesión converxente*, e escribiremos

$$\boxed{\{x_n\} \longrightarrow x_0, \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0\,.}$$

Diremos, tamén, que x_0 é o *límite* da sucesión.

Denominar *cola* dunha sucesión ao conxunto de termos da mesma a partir dun dado, ou sexa, aos termos x_n con $n \geq n_0$, permite abreviar a anterior formulación: unha sucesión converxe a un punto x_0 se toda bola aberta de centro x_0 contén unha cola da sucesión.

Lema 2.3 *Se unha sucesión $\{x_n\}$ converxe, o límite é único.*

Proposición 2.4 *Sexa X un espacio. Unha sucesión $\{x_n\}$ converxe a x_0 sse a sucesión numérica $d(x_n, x_0)$ converxe a cero.*

En $\mathbb{R}^p$, unha sucesión $\{x_n\}$ converxe a 0 sse a sucesión numérica das normas, $\{\|x_n\|\}$, converxe a 0 en $\mathbb{R}$.

A converxencia de sucesións no espacio euclidiano vén determinada pola converxencia de sucesións numéricas.

Proposición 2.5 *Sexan $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{np})$ puntos de $\mathbb{R}^p$. A sucesión $\{x_n\}$ converxe en $\mathbb{R}^p$ sse cada sucesión $\{x_{ni}\}$ converxe en $\mathbb{R}$.*

De forma precisa, cada sucesión $\{x_{ni}\}$ converxe a x_{0i} sse a sucesión $\{x_n\}$ converxe a $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0p})$.

Definición 2.6 Sexa $\phi\colon \mathbb{N} \to X$ unha sucesión, e sexa $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ unha aplicación estrictamente creciente. A sucesión definida pola composición

$$\boxed{\phi \circ h\colon \mathbb{N} \longrightarrow X}$$

chámase *subsucesión* de ϕ.

Así, $\{y_k\}$ é unha subsucesión de $\{x_n\}$ se $y_k = x_{n_k}$ e verifica

$$\boxed{k < l \Rightarrow n_k < n_l\,.}$$

Lema 2.7 *Toda subsucesión dunha sucesión converxente é converxente e converxe ao mesmo punto que a sucesión de partida.*

A converxencia permite caracterizar a topoloxía dos espacios que estamos a estudiar e, logo, calquera concepto ou propiedade que só dependa dela. Imos xustificar esta afirmación demostrando que permiten caracterizar os conxuntos pechados.

Antes de nada, ofreceremos unha maneira moi práctica e natural de construír sucesións converxentes. Convén enfatizar que, practicamente sempre, cada vez que necesitemos construír unha sucesión converxente imos recorrer a este método. De feito, condensa a idea clave para xeneralizar o concepto mesmo de converxencia a espacios máis abstractos.

Recordemos a propiedade de $\mathbb{R}$ de ser *arquimediano*: dado $x \in \mathbb{R}$ existe un enteiro natural N tal que $x < N$. Na proba do lema que segue, ímola utilizar para $x = 1/r$.

Lema 2.8 *Sexa x un punto de X. Tomemos para cada $n \in \mathbb{N}$ un punto x_n da bola $B_X(x, 1/n)$. A sucesión $\{x_n\}$ así formada converxe a x.*

Introduciremos agora un concepto de grande interese na relación entre converxencia e topoloxía, que nos permitirá caracterizar os conxuntos pechados utilizando converxencia.

Definición 2.9 Chámase *punto de acumulación* dun conxunto E a un punto x tal que para todo $r > 0$ se cumpre

$$\boxed{(B_X(x,r) - \{x\}) \cap E \neq \emptyset\,.}$$

O conxunto de puntos de acumulación de E denomínase *conxunto derivado*, e se denota por E'. A razón do nome é que, para que teña sentido a noción de derivada dunha aplicación nun punto do seu dominio, éste debe ser de acumulación.

Lema 2.10 *Sexa x un punto de acumulación dun conxunto E. Entón toda bola de centro x contén unha infinidade de puntos de E.*

Teorema 2.11 *Un conxunto E en X é pechado sse contén todos os seus puntos de acumulación.*

O seguinte é un procedemento útil para saber se un punto é de acumulación. Obsérvese que a condición no enunciado a seguir de ser $x_n \neq x$ para cada n se verifica automaticamente se $x \notin E$.

Proposición 2.12 *Sexa E un subconxunto de X. Un punto x é de acumulación de E sse existe unha sucesión $\{x_n\}$ de puntos de E, todos diferentes de x, que converxe a x.*

Xa que un conxunto é pechado sse contén todos os seus puntos de acumulación, séguese a seguinte caracterización:

Teorema 2.13 *Un subconxunto E de X é pechado sse o límite de toda sucesión converxente de puntos de E está en E.*

Definición 2.14 Dise que unha sucesión $\{x_n\}$ nun espacio X é unha *sucesión de Cauchy* se dado un número real positivo ϵ existe un enteiro n_0 tal que se $n, m \geq n_0$, daquela $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Proposición 2.15 *Toda sucesión converxente é de Cauchy.*

Lema 2.16 *O conxunto de puntos dunha sucesión de Cauchy é limitado.*

Lema 2.17 *Toda subsucesión dunha sucesión de Cauchy é de Cauchy.*

Proposición 2.18 *Sexa $\{x_n\}$ unha sucesión de Cauchy en X. Se a sucesión ten unha subsucesión converxente, daquela ela mesma é converxente.*

Proposición 2.19 *Sexa $\{x_n\}$ unha sucesión en X. Se o conxunto formado polos puntos da sucesión ten un punto de acumulación, daquela existe unha subsucesión converxente a este punto.*

Corolario 2.20 *Se o conxunto de puntos dunha sucesión de Cauchy ten un punto de acumulación, entón a sucesión converxe a este punto.*

2.21 Principio do Supremo *Todo conxunto non baleiro de números reais limitado superiormente ten supremo.*

Definición 2.22 Unha *sucesión contractiva de intervalos pechados* é unha familia $\{I_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ de intervalos pechados tal que $I_n \supset I_{n+1}$.

2.23 Postulado dos Intervalos Encaixados *Toda sucesión contractiva de intervalos pechados ten intersección non baleira.*

Lema 2.24 *Sexa I_n unha sucesión de intervalos encaixados en $\mathbb{R}$. Se as lonxitudes $l(I_n)$ dos intervalos converxen a cero, a súa intersección contén, ao sumo, un punto.*

Definición 2.25 Chámase *bloque* en $\mathbb{R}^p$ ao producto cartesiano de p intervalos pechados. Dados números $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2, \ldots, a_p < b_p$, queda determinado un bloque C,

$$\boxed{C = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \mid a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, p\}\,.}$$

O seguinte resultado será a nosa primeira forma de aseverar que $\mathbb{R}^p$ é completo. En analoxía co *Postulado dos Intervalos Encaixados*, o denominamos *Teorema dos Bloques Encaixados.*

Teorema 2.26 *Sexa* $\{C_k, k \in \mathbb{N}\}$ *unha sucesión contractiva de bloques non baleiros en* $\mathbb{R}^p$*, contractiva no sentido de que* $C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_k \supset \cdots$*. Entón existe un punto en* $\mathbb{R}^p$ *que pertence a todos os bloques.*

Lema 2.27 *Un conxunto de $\mathbb{R}^p$ é limitado sse está contido nun bloque.*

Teorema 2.28 (de Bolzano-Weierstrass) *Todo subconxunto infinito e limitado de $\mathbb{R}^p$ ten un punto de acumulación.*

Corolario 2.29 *Toda sucesión limitada en $\mathbb{R}^p$ ten unha subsucesión converxente.*

Teorema 2.30 *En $\mathbb{R}^p$ toda sucesión de Cauchy é converxente*

Proposición 2.31 *A condición de converxencia das sucesións de Cauchy en $\mathbb{R}$ implica o postulado dos intervalos encaixados.*

3 Continuidade

No estudio de calquera estructura matemática un ingrediente fundamental o constitúen as aplicacións compatíbeis con tal estructura. Así, as aplicacións lineares entre espacios vectoriais, ou os homomorfismos de grupos. Ás estructuras topolóxicas corresponden as *funcións continuas*.

Definición 3.1 Sexa $f\colon X \to Y$ unha aplicación con dominio un espacio $X \subset \mathbb{R}^p$ e rango un espacio $Y \subset \mathbb{R}^q$. Sexa x_0 un punto do dominio. Diremos que a aplicación f é *continua no punto* x_0 se para cada bola aberta en Y de centro a imaxe de x_0, $y_0 = f(x_0)$, existe unha bola aberta en X de centro o punto x_0 tal que a súa imaxe pola aplicación está contida na bola de partida,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{dada } B_Y(f(x_0), s), \text{ existe } B_X(x_0, r) \\[1em] \text{tal que} \\[1em] f(B_X(x_0, r)) \subset B_Y(f(x_0), s).\end{array}}$$

Unha aplicación dise continua cando é continua en todos os puntos do seu dominio.

Definición 3.2 Diremos que unha aplicación $f\colon X \to Y$ é *uniformemente continua* se dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\boxed{d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x),f(y)) < \varepsilon}$$

para calquera par de puntos $x, y \in X$.

Proposición 3.3 *A imaxe dunha sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ por unha aplicación uniformemente continua $f\colon X \to Y$ é unha sucesión de Cauchy.*

Teorema 3.4 *Sexan* $f\colon X \to Y$ *e* $g\colon Y \to Z$ *dúas aplicacións. Sexan* $y = f(x)$ *e* $z = g(y)$*. Se* f *é continua en* x *e* g *é continua en* y*, daquela a súa composición,* $g \circ f\colon X \to Z$*, é continua en* x*. En particular, a composición de aplicacións continuas é unha aplicación continua.*

Teorema 3.5 *Sexa $f\colon X \to Y$ unha aplicación. As seguintes condicións son equivalentes:*

1. *f é continua .*
2. *A imaxe recíproca por f de todo conxunto aberto en Y é un conxunto aberto de X.*
3. *A imaxe recíproca por f de toda bola aberta en Y é un conxunto aberto de X.*
4. *A imaxe recíproca por f de todo conxunto pechado en Y é un conxunto pechado de X.*

Definición 3.6 Sexa $X \subset \mathbb{R}^p$ un espacio. Unha *cobertura* de X é unha familia $\mathcal{U}$ de subconxuntos de X cuxa unión é todo X,

$$\boxed{X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U\,.}$$

No caso en que todos os conxuntos de $\mathcal{U}$ sexan abertos, diremos que é unha *cobertura aberta*. No caso de ser $\mathcal{U}$ finita, diremos que é unha *cobertura finita*. Se todos os conxuntos de $\mathcal{U}$ son pechados, diremos que é unha *cobertura pechada*.

Sexa $\mathcal{U} = \{U_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ unha cobertura de X. Sexan $f_\lambda \colon U_\lambda \to Y$ aplicacións tales que

$$\boxed{f_\lambda | U_\lambda \cap U_\mu \; = \; f_\mu | U_\lambda \cap U_\mu \quad \text{para todo } \; \lambda, \, \mu \in \Lambda \, .}$$

Daquela, pódese definir unha aplicación $f \colon X \to Y$ por

$$\boxed{f(x) \; = \; f_\lambda(x) \quad \text{se} \quad x \in \Lambda \, .}$$

A aplicación f así construída chámase *aplicación combinada* da familia de aplicacións $\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$.

Teorema 3.7 *Sexa* $\mathcal{U} = \{U_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ *unha cobertura aberta de un espacio* X*,* $\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ *unha familia de aplicacións continuas con dominio cada aberto* U_λ *e rango un espacio* Y*. Se as restriccións ás interseccións dos dominios coinciden, a aplicación combinada resultante é unha aplicación continua.*

O mesmo ocorre se a cobertura é pechada e finita.

Definición 3.8 Sexan X e Y espacios. Unha aplicación $f\colon X \to Y$ dise *secuencialmente continua* nun punto x_0 de X se para cada sucesión $\{x_n\}$ en X converxente a x_0, a sucesión imaxe, $\{f(x_n)\}$, converxe a $f(x_0)$.
A aplicación dise *secuencialmente continua* se é secuencialmente continua en todos os puntos do seu dominio.

Esta forma de continuidade denomínase *continuidade secuencial*. No noso contexto é equivalente á continuidade. Pódese expresar brevemente dicindo que límites e aplicacións continuas conmutan,

$$\boxed{f(\text{lím}_{n\to\infty} x_n) = \text{lím}_{n\to\infty} f(x_n)\,.} \tag{10}$$

Teorema 3.9 *Sexan X e Y espacios. Unha aplicación $f\colon X \to Y$ é secuencialmente continua nun punto x_0 sse é continua no punto.*

Definición 3.10 Dado un subespacio E de un espacio X e unha aplicación con dominio X, $f\colon X \to Y$, denomínase *restricción* de f a E, e se denota $f|_E$, á aplicación de E en Y,

$$\boxed{f|_E = f \circ i}$$

composición da inclusión de E en X e da aplicación dada.

Proposición 3.11 *A restricción $f|_E$ a un subespacio E de X de unha aplicación continua $f\colon X \to Y$ é unha aplicación continua.*

Lema 3.12 *Sexa E un subespacio aberto dun espacio X. Daquela, que unha aplicación $f\colon X \to Y$ sexa continua nun punto x_0 de E equivale a que a súa restricción $f|_E$ sexa continua en x_0.*

Definición 3.13 Sexa $X \subset \mathbb{R}^p$ un espacio. Un subconxunto E de X é *denso* se todo punto $x \notin E$ é punto de acumulación de E.

Proposición 3.14 *Un subconxunto E de un espacio X é denso sse interseca toda bola, ou sexa, sse*

$$\boxed{E \cap B_X(x,r) \neq \emptyset}$$

para todo $x \in X$ e para todo $r > 0$.

Proposición 3.15 *Un subconxunto E de un espacio X é denso sse para todo punto $x \in X$ existe unha sucesión $\{x_n\}$ de puntos de E tal que $\{x_n\}$ converxe a x.*

Definición 3.16 Sexa E un subespacio de un espacio X, $f\colon E \to Y$ unha aplicación continua. Chámase *extensión* de f a unha aplicación continua $F\colon X \to Y$ que restrinxida a E coincida con f, $F \circ i = f$.

Ou sexa, que faga conmutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & Y \\ X \arrow[ur, dashed, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Lema 3.17 *Sexa E un subespacio denso de X, denotemos por i a inclusión, $i\colon E \to X$. Sexa $f\colon E \to Y$ unha aplicación continua. Se existe unha extensión $F\colon X \to Y$ de f, é única.*

Teorema 3.18 *Sexa E un subespacio denso de $X \subset \mathbb{R}^p$, denotemos por i a inclusión, $i\colon E \to X$. Sexa Y un subespacio pechado de $\mathbb{R}^q$. Sexa $f\colon E \to Y$ unha aplicación uniformemente continua. Entón, f admite unha extensión $g\colon X \to Y$, que é única e uniformemente continua.*

Definición 3.19 Sexan $X \subset \mathbb{R}^p$, $Y \subset \mathbb{R}^q$ dous espacios. Diremos que unha aplicación $h\colon X \to Y$ é un *homeomorfismo* se é continua, se admite inversa, $h^{-1}\colon Y \to X$, e a inversa tamén é continua.
Cando entre dous espacios X e Y existe un homeomorfismo, dise que son *homeomorfos*, e se escribe

$$\boxed{X \approx Y}$$

Proposición 3.20 *A composición de homeomorfismos é un homeomorfismo.*

Dun xeito algo formal e reduccionista, poderíase dicir que a topoloxía se ocupa do estudio daquelas propiedades que se conservan por homeomorfismos, as denominadas *propiedades topolóxicas*. Moitas das propiedades que imos considerar, por exemplo, a compacidade e a conexidade que estudiaremos no próximo capítulo, son topolóxicas. Do feito de seren os homeomorfismos aplicacións bixectivas segue que a cardinalidade dun conxunto é unha propiedade topolóxica. O ser limitado, por contra, non é unha propiedade topolóxica, como se deduce do feito de ser un intervalo aberto e a recta toda enteira homeomorfos.

4 Compacidade e conexidade

En Análise estudiouse que unha función real continua con dominio un intervalo pechado alcanza o máximo e o mínimo. Esta importante propiedade non é exclusiva de estas aplicacións, vai ser certa en moitas situacións comúns. O concepto de compacidade permite dar a resposta máis xeral.

Tamén se estudiou que, na situación considerada, a función alcanza todos os valores intermedios. A conexidade vai dar a resposta máis xeral. Formaliza unha idea intuitivamente simple, que resulta efectivamente simple en $\mathbb{R}$, mais moito menos previsíbel en dimensións superiores.

Definición 4.1 Sexa X un espacio, E un subconxunto de X. Unha *cobertura* de E é unha familia $\mathcal{U}$ de subconxuntos de X cuxa unión contén E,

$$\boxed{E \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U\,.}$$

Definición 4.2 Sexan $X \subset \mathbb{R}^p$ un espacio, E un subconxunto de X e $\mathcal{U}$ unha cobertura de E. Unha *subcobertura* de $\mathcal{U}$ é unha subcolección $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ que tamén é unha cobertura.

A seguinte condición, que utilizaremos como definición de *compacidade*, é a *condición de Borel-Lebesgue*.

Definición 4.3 Dise que un subconxunto K de X é *compacto* se de toda cobertura aberta de K se pode extraer unha subcobertura finita.

Proposición 4.4 *Todo conxunto compacto é pechado.*

Proposición 4.5 *Todo conxunto compacto é limitado.*

Sexa $c = (c_1, c_2, \ldots, c_p)$ un punto de $\mathbb{R}^p$, $r > 0$. Consideraremos o *cubo* $L(c, r)$, de lado $2r$ e centro o punto c,

$$\boxed{L(c,r) = [c_1 - r, c_1 + r] \times [c_2 - r, c_2 + r] \times \ldots \times [c_p - r, c_p + r]\,.}$$

A diagonal do cubo ten lonxitude $\Delta(L) = 2r \cdot \sqrt{p}$

Proposición 4.6 *Todo cubo $L[c, r]$ é un subconxunto compacto de $\mathbb{R}^p$.*

Proposición 4.7 *Todo subconxunto pechado dun compacto é compacto.*

Teorema 4.8 (Heine-Borel) *Un subconxunto de $\mathbb{R}^p$ é compacto sse é pechado e limitado.*

Corolario 4.9 *Todo conxunto compacto non baleiro de números reais alcanza o máximo e o mínimo.*

Proposición 4.10 *Sexa K un subconxunto de $\mathbb{R}^p$. As seguintes condicións son equivalentes:*

1. *K é compacto.*
2. (condición de Bolzano-Weierstrass) *Todo subconxunto infinito de K ten un punto de acumulación en K.*
3. (Compacidade secuencial) *Toda sucesión de K ten unha subsucesión converxente en K.*
4. *K é pechado e limitado.*

Producto de conxuntos compactos

Proposición 4.11 *Sexan $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$ dous conxuntos secuencialmente compactos. O seu producto $A \times B \subset \mathbb{R}^{p+q}$ tamén é secuencialmente compacto.*

Teorema 4.12 *Sexa $f: X \to Y$ unha aplicación continua, K un subconxunto compacto de X. A imaxe de K, $f(K)$, é un conxunto compacto en Y.*

Corolario 4.13 *A compacidade é unha propiedade topolóxica.*

4.14 Exemplo A recta $\mathbb{R}$ e o intervalo unidade pechado $[0,1]$ non son homeomorfos, pois o intervalo pechado é compacto e a recta, non. □

Teorema 4.15 *Un subconxunto non baleiro K de $\mathbb{R}^p$ é compacto sse a imaxe de toda aplicación real continua con dominio K, $f: K \to \mathbb{R}$, alcanza o máximo e o mínimo.*

Definición 4.16 Diremos que unha aplicación $f\colon X \to Y$ é *uniformemente continua* se dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\boxed{d(x,y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x),f(y)) < \varepsilon\ .}$$

Teorema 4.17 *Toda aplicación continua con dominio compacto é uniformemente continua.*

Definición 4.18 Sexa X un espacio, U e V subconxuntos de X. Dise que U e V forman unha *separación* do espacio X cando ambos os conxuntos son abertos, son disxuntos e a súa unión é todo X. A separación denótase $(U \mid V)$.
Cando, ademais, U e V son os dous non baleiros, dise que é unha *separación non trivial*.

Definición 4.19 Dise que un espacio X é *conexo* se non admite ningunha separación agás a trivial.

Teorema 4.20 *O intervalo pechado unidade* $[0,1]$ *é conexo.*

Teorema 4.21 *A imaxe continua dun conxunto conexo é un conxunto conexo.*

Corolario 4.22 *A conexidade é unha propiedade topolóxica.*

Lema 4.23 *Dado un espacio X e unha separación $(U \mid V)$ de X, todo subconxunto conexo E de X verifica $E \subset U$ ou $E \subset V$.*

Proposición 4.24 *Un espacio X é conexo sse dous puntos calquera de X están contidos nun subconxunto conexo.*

Proposición 4.25

1. *Sexan $X, Y \subset \mathbb{R}^p$ conexos, con $X \cap Y \neq \emptyset$. Daquela $X \cup Y$ é conexo.*
2. *A unión $\cup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ de conxuntos conexos que se intersecan dous a dous,*

$$E_\lambda \cap E_\mu \neq \emptyset, \lambda, \mu \in \Lambda,$$

é un conxunto conexo.

Proposición 4.26 *Sexa X un espacio conexo, $f\colon X \to \mathbb{R}$, unha función real continua. Se f alcanza dous valores x e y, alcanza calquera valor intermedio.*

Corolario 4.27 *Non existe ningunha aplicación continua inxectiva de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.*

Corolario 4.28 *Toda ecuación de grao impar con coeficientes reais ten cando menos unha raíz real.*

Teorema 4.29 *Un conxunto compacto e conexo X en $\mathbb{R}$ con máis dun punto é un intervalo pechado.*

Corolario 4.30 *Toda aplicación real continua f con dominio un espacio compacto e conexo X, alcanza un valor mínimo m, un valor máximo M e todo valor intermedio.*

Corolario 4.31 *Toda aplicación continua dun intervalo pechado en si mesmo ten un punto fixo.*

Dous puntos dunha circunferencia dinse *antípodas* se son extremos dun mesmo diámetro. No caso dunha circunferencia de centro a orixe os pares de puntos antípodas son da forma $x, -x$.

Corolario 4.32 *Toda aplicación real continua dunha esfera aplica algún par de puntos antípodas no mesmo punto imaxe.*

Referencias

[1] E. Bujalance, J. Tarrés, *Problemas de Topología*. Cuadernos de la UNED, Madrid, 1989.

[2] W.G. Chinn and N.E. Steenrod, *Primeros conceptos de Topología*. Editorial Alhambra, Madrid, 1975.

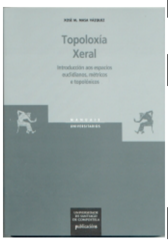
[3] E.T. Copson, *Metric spaces*. Cambridge University Press, 1968.

[4] J.M. Díaz Moreno, *Introducción a la topología de los espacios métricos*. Servicio de Publicaciones, Universidad de Cadiz, 1998.

[5] G. Flory, *Ejercicios de Topología y Análisis*. Editorial Reverté, Barcelona, 1978.

[6] E. Lages Lima, *Espaços Métricos*. IMPA, Rio de Janeiro, 1983.

[7] S. Lipschutz, *Topología General*. McGraw-Hill, 1981.



[8] X.M. Masa Vázquez, *Topoloxía xeral. Introducción aos espacios euclidianos, métricos e topolóxicos*. Manuais universitarios. Universidade de Santiago de Compostela, 1999.

[9] F. Mascaró, J. Monterde, J.J. Nuño, R. Sivera, *Introducció a la topologia*. Universitat de València, 1997

[10] F. Michavila, *Fundamentos del cálculo numérico 1: Topología métrica*. Editorial Reverté, S.A. Barcelona, 1986.

[11] W.A. Sutherland, *Introduction to metrics and topological spaces*. Clarendon Press, Oxford, 1975.

Índice de Materias