Realización geométrica de la curvatura

Miguel Brozos Vázquez

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Trabajo realizado con: P. Gilkey, H. Kang, E. Merino, S. Nikčević, R. Vázquez Lorenzo y G. Weingart

Workshop on Differential Geometry and Relativity

Objetivo

Objetivo

Objetos dados: modelo algebraico

Sean dados los siguientes elementos:

- V un espacio vectorial
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar
- R un tensor curvatura algebraico

Objetos dados: modelo algebraico

Sean dados los siguientes elementos:

- V un espacio vectorial
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar
- R un tensor curvatura algebraico

Problemas

Objetos dados: modelo algebraico

Sean dados los siguientes elementos:

- V un espacio vectorial
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar
- R un tensor curvatura algebraico

Problemas

- ¿Existe una variedad Riemanniana (M, g) y un punto $p \in M$ en el que se realiza el modelo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, A)$?

Objetivo

Objetos dados: modelo algebraico

Sean dados los siguientes elementos:

- V un espacio vectorial
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar
- R un tensor curvatura algebraico

Problemas

- ¿Existe una variedad Riemanniana (M, g) y un punto $p \in M$ en el que se realiza el modelo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, A)$?
- Si el modelo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, A)$ posee alguna propiedad geométrica, ¿puede ésta extenderse a la variedad que lo realiza?

Objetivo

Objetos dados: modelo algebraico

Sean dados los siguientes elementos:

- V un espacio vectorial
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar
- R un tensor curvatura algebraico

Problemas

- ¿Existe una variedad Riemanniana (M, g) y un punto $p \in M$ en el que se realiza el modelo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, A)$?
- Si el modelo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, A)$ posee alguna propiedad geométrica, ¿puede ésta extenderse a la variedad que lo realiza?
- Si el modelo está dotado de una estructura Hermítica, ¿bajo qué condiciones puede ser realizado por una variedad casi-Hermítica?. ¿Y por una variedad Hermítica?

Índice

Índice

Contexto geométrico

(M, g) variedad Riemanniana de dimensión n.

Contexto geométrico

(M, g) variedad Riemanniana de dimensión n.

1. ∇ denota la conexión de Levi-Civita.

Contexto geométrico

(M, g) variedad Riemanniana de dimensión n.

1. ∇ denota la conexión de Levi-Civita.
2. $R(x, y)z = \nabla_{[x,y]}z - [\nabla_x, \nabla_y]z$ es el tensor curvatura.

Contexto geométrico

(M, g) variedad Riemanniana de dimensión n.

1. ∇ denota la conexión de Levi-Civita.
2. $R(x, y)z = \nabla_{[x,y]}z - [\nabla_x, \nabla_y]z$ es el tensor curvatura. Definimos el tensor curvatura de tipo $(0, 4)$:

$$R(x, y, z, w) = g(R(x, y)z, w)$$

Contexto geométrico

(M, g) variedad Riemanniana de dimensión n.

1. ∇ denota la conexión de Levi-Civita.
2. $R(x, y)z = \nabla_{[x,y]}z - [\nabla_x, \nabla_y]z$ es el tensor curvatura.
   Definimos el tensor curvatura de tipo $(0, 4)$:
   $$R(x, y, z, w) = g(R(x, y)z, w)$$
   $$\text{Simetrías} \begin{cases} R(x, y, z, w) = -R(y, x, z, w) = R(z, w, x, y) \\ R(x, y)z + R(y, z)x + R(z, x)y = 0 \end{cases}$$

Contexto geométrico

(M, g) variedad Riemanniana de dimensión n.

1. ∇ denota la conexión de Levi-Civita.
2. $R(x, y)z = \nabla_{[x,y]}z - [\nabla_x, \nabla_y]z$ es el tensor curvatura.
   Definimos el tensor curvatura de tipo $(0, 4)$:
   $$R(x, y, z, w) = g(R(x, y)z, w)$$

Tensor de Ricci

$\rho(x, y) = \sum_i R(e_i, x, e_i, y)$

Contexto geométrico

(M, g) variedad Riemanniana de dimensión n.

1. ∇ denota la conexión de Levi-Civita.
2. $R(x, y)z = \nabla_{[x,y]}z - [\nabla_x, \nabla_y]z$ es el tensor curvatura.
   Definimos el tensor curvatura de tipo $(0, 4)$:
   $$R(x, y, z, w) = g(R(x, y)z, w)$$

Tensor de Ricci

$\rho(x, y) = \sum_i R(e_i, x, e_i, y)$

Curvatura escalar

$\tau = \sum_i \rho(e_i, e_i)$

Contexto geométrico

(M, g) variedad Riemanniana de dimensión n.

1. ∇ denota la conexión de Levi-Civita.
2. $R(x,y)z = \nabla_{[x,y]}z - [\nabla_x, \nabla_y]z$ es el tensor curvatura. Definimos el tensor curvatura de tipo $(0,4)$:

$$R(x,y,z,w) = g(R(x,y)z, w)$$

Tensor de Ricci

$\rho(x,y) = \sum_i R(e_i, x, e_i, y)$

Curvatura escalar

$\tau = \sum_i \rho(e_i, e_i)$

Tensor de Weyl (conforme)

$$\begin{aligned} W(x,y,z,v) \;=\; & R(x,y,z,v) \\ & + \tfrac{\tau}{(n-1)(n-2)}\{g(x,z)g(y,v) - g(y,z)g(x,v)\} \\ & - \tfrac{1}{n-2}\{\rho(x,z)g(y,v) - \rho(y,z)g(x,v) \\ & + \rho(y,v)g(x,z) - \rho(x,v)g(y,z)\} \end{aligned}$$

Contexto algebraico

Modelos algebraicos

Llamamos modelos algebraico al triple $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ formado por:

Contexto algebraico

Modelos algebraicos

Llamamos modelos algebraico al triple $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ formado por:

1. V: un espacio vectorial de dimensión n.

Contexto algebraico

Modelos algebraicos

Llamamos modelos algebraico al triple $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ formado por:

1. V: un espacio vectorial de dimensión n.
2. $\langle\cdot,\cdot\rangle$: un producto escalar en V.

Contexto algebraico

Modelos algebraicos

Llamamos modelos algebraico al triple $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, A)$ formado por:

1. V: un espacio vectorial de dimensión n.
2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$: un producto escalar en V.
3. A: un tensor curvatura algebraico.

Contexto algebraico

Modelos algebraicos

Llamamos modelos algebraico al triple $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ formado por:

1. V: un espacio vectorial de dimensión n.
2. $\langle\cdot,\cdot\rangle$: un producto escalar en V.
3. A: un tensor curvatura algebraico.
   Es decir, un tensor de tipo $(0, 4)$ que posee las mismas simetrías que el tensor curvatura de una variedad riemanniana:
   $$\begin{cases} A(x, y, z, w) = -A(y, x, z, w) = A(z, w, x, y) \\ A(x, y)z + A(y, z)x + A(z, x)y = 0 \end{cases}$$

Contexto algebraico

Modelos algebraicos

Llamamos modelos algebraico al triple $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ formado por:

1. V: un espacio vectorial de dimensión n.
2. $\langle\cdot,\cdot\rangle$: un producto escalar en V.
3. A: un tensor curvatura algebraico.
   Es decir, un tensor de tipo $(0,4)$ que posee las mismas simetrías que el tensor curvatura de una variedad riemanniana:
   $$\begin{cases} A(x,y,z,w) = -A(y,x,z,w) = A(z,w,x,y) \\ A(x,y)z + A(y,z)x + A(z,x)y = 0 \end{cases}$$

Operadores asociados a la curvatura

- Tensor de Ricci
- Curvatura escalar
- Tensor de Weyl

Realización geométrica

Realización geométrica

Definición

Realización geométrica

Definición

- Sea (M, g) una variedad Riemanniana.

Realización geométrica

Definición

- Sea (M, g) una variedad Riemanniana.
- Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo algebraico.

Realización geométrica

Definición

- Sea (M, g) una variedad Riemanniana.
- Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, A)$ un modelo algebraico.

Decimos que (M, g) realiza al modelo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, A)$ en un punto $P \in M$ si existe un isomorfismo

$$\phi : V \longrightarrow T_P M$$

tal que

Realización geométrica

Definición

- Sea (M, g) una variedad Riemanniana.
- Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo algebraico.

Decimos que (M, g) realiza al modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ en un punto $P \in M$ si existe un isomorfismo

$$\phi : V \longrightarrow T_P M$$

tal que

Realización geométrica

Definición

- Sea (M, g) una variedad Riemanniana.
- Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo algebraico.

Decimos que (M, g) realiza al modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ en un punto $P \in M$ si existe un isomorfismo

$$\phi : V \longrightarrow T_P M$$

tal que

- $\phi^* g_p = \langle\cdot,\cdot\rangle$

Realización geométrica

Definición

- Sea (M, g) una variedad Riemanniana.
- Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo algebraico.

Decimos que (M, g) realiza al modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ en un punto $P \in M$ si existe un isomorfismo

$$\phi : V \longrightarrow T_P M$$

tal que

- $\phi^* g_p = \langle\cdot,\cdot\rangle$
- $\phi^* R_P = A$

Realización geométrica

Definición

- Sea (M, g) una variedad Riemanniana.
- Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo algebraico.

Decimos que (M, g) realiza al modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ en un punto $P \in M$ si existe un isomorfismo

$$\phi : V \longrightarrow T_P M$$

tal que

- $\phi^* g_p = \langle\cdot,\cdot\rangle$
- $\phi^* R_P = A$

Es decir, $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ y $(T_P M, g_P, R_p)$ son isomorfos.

Todo modelo algebraico es geométricamente realizable

Todo modelo algebraico es geométricamente realizable

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo algebraico. Entonces existe una variedad Riemanniana (M, g) que realiza $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ en un punto $P \in M$.

Todo modelo algebraico es geométricamente realizable

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo algebraico. Entonces existe una variedad Riemanniana (M, g) que realiza $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ en un punto $P \in M$.

Demostración.

Todo modelo algebraico es geométricamente realizable

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo algebraico. Entonces existe una variedad Riemanniana (M, g) que realiza $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ en un punto $P \in M$.

Demostración. Tomemos M entorno de $0 \in V$ (P=0).

Todo modelo algebraico es geométricamente realizable

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo algebraico. Entonces existe una variedad Riemanniana (M, g) que realiza $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ en un punto $P \in M$.

Demostración. Tomemos M entorno de $0 \in V$ (P=0).
Para $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de V, tomamos $(x_1, \dots, x_n)$ coordenadas locales inducidas por $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Todo modelo algebraico es geométricamente realizable

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo algebraico. Entonces existe una variedad Riemanniana (M, g) que realiza $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ en un punto $P \in M$.

Demostración. Tomemos M entorno de $0 \in V$ (P=0).
Para $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de V, tomamos $(x_1, \ldots, x_n)$ coordenadas locales inducidas por $\{e_1, \ldots, e_n\}$.
Definimos:

$$g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle + A_{ijkl}x^k x^l$$

Todo modelo algebraico es geométricamente realizable

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo algebraico. Entonces existe una variedad Riemanniana (M, g) que realiza $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ en un punto $P \in M$.

Demostración. Tomemos M entorno de $0 \in V$ (P=0).
Para $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de V, tomamos $(x_1, \ldots, x_n)$ coordenadas locales inducidas por $\{e_1, \ldots, e_n\}$.
Definimos:

$$g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle + A_{ijkl}x^k x^l$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ijk} &:= g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k) = \tfrac{1}{2}(g_{jk/i} + g_{ik/j} - g_{ij/k})\,. \\
R_{ijkl} &= \{\partial_i\Gamma_{jkl} - \partial_j\Gamma_{ikl}\} + O(|x|^2) \\
&= \frac{1}{2}\{g_{jl/ik} + g_{ik/jl} - g_{jk/il} - g_{il/jk}\} + O(|x|^2) \\
&=_{|0} \frac{1}{2}\{A_{jlik} + A_{ikjl} - A_{jkil} - A_{iljk}\} =_{|0} A_{ijkl}
\end{aligned}$$

Todo modelo algebraico es geométricamente realizable

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo algebraico. Entonces existe una variedad Riemanniana (M, g) que realiza $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ en un punto $P \in M$.

Demostración. Tomemos M entorno de $0 \in V$ (P=0).
Para $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de V, tomamos $(x_1, \ldots, x_n)$ coordenadas locales inducidas por $\{e_1, \ldots, e_n\}$.
Definimos:

$$g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle + A_{ijkl}x^k x^l$$

Entonces:

$$\begin{array}{lcl}
\Gamma_{ijk} & := & g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k) = \frac{1}{2}(g_{jk/i} + g_{ik/j} - g_{ij/k}) \,. \\
R_{ijkl} & = & \{\partial_i\Gamma_{jkl} - \partial_j\Gamma_{ikl}\} + O(|x|^2) \\
 & = & \frac{1}{2}\{g_{jl/ik} + g_{ik/jl} - g_{jk/il} - g_{il/jk}\} + O(|x|^2) \\
 & =_{|0} & \frac{1}{2}\{A_{jlik} + A_{ikjl} - A_{jkil} - A_{iljk}\} =_{|0} \; A_{ijkl}
\end{array}$$

Índice

Variedades con curvatura escalar constante

Variedades con curvatura escalar constante

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo algebraico. Existe una variedad Riemanniana (M, g) real analítica con curvatura escalar constante que realiza el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ en un punto $P \in M$.

Variedades con curvatura escalar constante

Teorema

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, A)$ un modelo algebraico. Existe una variedad Riemanniana (M, g) real analítica con curvatura escalar constante que realiza el modelo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, A)$ en un punto $P \in M$.

Variedades con curvatura escalar constante

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo algebraico. Existe una variedad Riemanniana (M, g) real analítica con curvatura escalar constante que realiza el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ en un punto $P \in M$.

Demostración.

Variedades con curvatura escalar constante

Teorema

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, A)$ un modelo algebraico. Existe una variedad Riemanniana (M, g) real analítica con curvatura escalar constante que realiza el modelo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, A)$ en un punto $P \in M$.

Demostración.

Tomamos M entorno de P y $(x_1, \ldots, x_n)$ un sistema de coordenadas locales (reales analíticas) centradas en P.

Variedades con curvatura escalar constante

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo algebraico. Existe una variedad Riemanniana (M, g) real analítica con curvatura escalar constante que realiza el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ en un punto $P \in M$.

Demostración.

Tomamos M entorno de P y $(x_1, \ldots, x_n)$ un sistema de coordenadas locales (reales analíticas) centradas en P.
Haciendo un cambio de coordenadas lineal, podemos suponer que $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ es una base ortonormal de $T_P M$.

Variedades con curvatura escalar constante

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo algebraico. Existe una variedad Riemanniana (M, g) real analítica con curvatura escalar constante que realiza el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ en un punto $P \in M$.

Demostración.

Tomamos M entorno de P y $(x_1, \ldots, x_n)$ un sistema de coordenadas locales (reales analíticas) centradas en P.

Haciendo un cambio de coordenadas lineal, podemos suponer que $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ es una base ortonormal de $T_P M$.

Definimos como antes:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + A_{ijkl}x^k x^l$$

Variedades con curvatura escalar constante

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo algebraico. Existe una variedad Riemanniana (M, g) real analítica con curvatura escalar constante que realiza el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ en un punto $P \in M$.

Demostración.

Tomamos M entorno de P y $(x_1, \dots, x_n)$ un sistema de coordenadas locales (reales analíticas) centradas en P.
Haciendo un cambio de coordenadas lineal, podemos suponer que $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ es una base ortonormal de $T_P M$.
Definimos como antes:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + A_{ijkl} x^k x^l$$

Entonces (M, g) realizan el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$. Pero no tiene necesariamente curvatura escalar contante.

Variedades con curvatura escalar constante

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo algebraico. Existe una variedad Riemanniana (M, g) real analítica con curvatura escalar constante que realiza el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ en un punto $P \in M$.

Demostración.

Tomamos M entorno de P y $(x_1, \ldots, x_n)$ un sistema de coordenadas locales (reales analíticas) centradas en P.
Haciendo un cambio de coordenadas lineal, podemos suponer que $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ es una base ortonormal de $T_P M$.
Definimos como antes:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + A_{ijkl} x^k x^l$$

Entonces (M, g) realizan el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$. Pero no tiene necesariamente curvatura escalar contante.

OBJETIVO: Modificar g a métrica de curvatura escalar constante.

Variedades con curvatura escalar constante

Variedades con curvatura escalar constante

Transformación de g

Variedades con curvatura escalar constante

Transformación de g

Definimos una tranformación conforme:

$$\tilde{g} := (1 + 2\phi)g$$

con $\phi(0) = 0$.

Variedades con curvatura escalar constante

Transformación de g

Definimos una tranformación conforme:

$$\tilde{g} := (1 + 2\phi)g$$

con $\phi(0) = 0$.

Variedades con curvatura escalar constante

Transformación de g

Definimos una tranformación conforme:

$$\tilde{g} := (1 + 2\phi)g$$

con $\phi(0) = 0$.

Observaciones:

Variedades con curvatura escalar constante

Transformación de g

Definimos una tranformación conforme:

$$\tilde{g} := (1 + 2\phi)g$$

con $\phi(0) = 0$.

Observaciones:

- Puesto que $\phi(0) = 0$, $\tilde{g}$ es una métrica definida en un entorno de 0.

Variedades con curvatura escalar constante

Transformación de g

Definimos una tranformación conforme:

$$\tilde{g} := (1 + 2\phi)g$$

con $\phi(0) = 0$.

Observaciones:

- Puesto que $\phi(0) = 0$, $\tilde{g}$ es una métrica definida en un entorno de 0.
- Puesto que $\tilde{g}$ debe realizar $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$, debe verificarse $(\phi_{ij} = \frac{\partial}{\partial_i}\frac{\partial}{\partial_j}\phi)$:

$$\tilde{R}_{ijkl} = |_0 \; R_{ijkl} + g_{jl}\phi_{ik} - g_{il}\phi_{jk} - g_{jk}\phi_{il} + g_{ik}\phi_{jl} = A_{ijkl}$$

Variedades con curvatura escalar constante

Transformación de g

Definimos una tranformación conforme:

$$\tilde{g} := (1 + 2\phi)g$$

con $\phi(0) = 0$.

Observaciones:

- Puesto que $\phi(0) = 0$, $\tilde{g}$ es una métrica definida en un entorno de 0.
- Puesto que $\tilde{g}$ debe realizar $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$, debe verificarse $(\phi_{ij} = \frac{\partial}{\partial_i}\frac{\partial}{\partial_j}\phi)$:

$$\tilde{R}_{ijkl} = |_0\, R_{ijkl} + g_{jl}\phi_{ik} - g_{il}\phi_{jk} - g_{jk}\phi_{il} + g_{ik}\phi_{jl} = A_{ijkl}$$

- Para que $\tilde{\tau}$ sea constante debe verificarse:

$$\tilde{\tau} - \tau_g(0) = 0$$

Variedades con curvatura escalar constante

Transformación de g

Definimos una tranformación conforme:

$$\tilde{g} := (1 + 2\phi)g$$

con $\phi(0) = 0$.

Sistema de EDPs

Tenemos la ecuación en derivadas parciales:

$$\tilde{\tau} - \tau_g(0) = 0 \quad \text{con condiciones iniciales:} \begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \tilde{R}_{ijkl}(0) = R_{ijkl}(0) \end{cases}$$

Variedades con curvatura escalar constante

Transformación de g

Definimos una tranformación conforme:

$$\tilde{g} := (1 + 2\phi)g$$

con $\phi(0) = 0$.

Sistema de EDPs

Tenemos la ecuación en derivadas parciales:

$$\tilde{\tau} - \tau_g(0) = 0 \quad \text{con condiciones iniciales:} \left\{ \begin{array}{c} \phi(0) = 0 \\ \tilde{R}_{ijkl}(0) = R_{ijkl}(0) \end{array} \right.$$

Variedades con curvatura escalar constante

Transformación de g

Definimos una tranformación conforme:

$$\tilde{g} := (1 + 2\phi)g$$

con $\phi(0) = 0$.

Sistema de EDPs

Tenemos la ecuación en derivadas parciales:

$$\tilde{\tau} - \tau_g(0) = 0 \quad \text{con condiciones iniciales:} \left\{ \begin{array}{c} \phi(0) = 0 \\ \tilde{R}_{ijkl}(0) = R_{ijkl}(0) \end{array} \right.$$

Variedades con curvatura escalar constante

Sean $x = (x_1, \dots, x_n)$ coordenadas en $\mathbb{R}^n$ y $x = (y, x_n)$ donde $y = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Sea W un espacio vectorial auxiliar. Sea

$$u := (u_0, u_1, \dots, u_n) \in W \otimes \mathbb{R}^{n+1} .$$

Suponemos dada una función real analítica $\psi(x, u)$ que toma valores en W y una colección de funciones reales analíticas $\psi^{ij}(x, u) = \psi^{ji}(x, u)$ que toman valores en $\mathrm{End}(W)$ y que están definidas cerca de 0. Dada una función real analítica $U : \mathbb{R}^n \to W$ definida cerca de $x = 0$, sea $u(x) := (u_0(x), \dots, u_n(x))$ donde

$$u_0(x) := U(x), \quad u_1(x) := \partial_1 U(x), \quad \dots, \quad u_n(x) := \partial_n U(x) .$$

Teorema de Cauchy-Kovalevskaya (Evans)

Si $\det \psi^{nn}(0) \neq 0$, existe $\varepsilon > 0$ y una única U real analítica definida para $|x| < \varepsilon$ que satisface las ecuaciones:

$$\psi^{ij}(x, u(x))\partial_i\partial_j U(x) + \psi(x, u(x)) = 0,$$
$$U(y, 0) = 0, \quad \text{y} \quad \partial_n U(y, 0) = 0 .$$

Variedades con curvatura escalar constante

Resolveremos el sistema:

$$\tilde{\tau} - \tau_g(0) = 0, \quad \phi(y,0) = 0, \quad \partial_n \phi(y,0) = 0\,. \tag{1}$$

Variedades con curvatura escalar constante

Resolveremos el sistema:

$$\tilde{\tau} - \tau_g(0) = 0, \quad \phi(y,0) = 0, \quad \partial_n \phi(y,0) = 0\,. \tag{1}$$

Hipótesis: ¿$\psi_{nn}(0) \neq 0$?

Calculamos

$$\tilde{R}_{ijkl} = |_0 R_{ijkl} + g_{jl}\phi_{ik} - g_{il}\phi_{jk} - g_{jk}\phi_{il} + g_{ik}\phi_{jl},$$
$$\tilde{\tau} - \tau_g(0) = |_0 \tilde{g}^{il}\tilde{g}^{jk}\{g_{jl}\phi_{ik} - g_{il}\phi_{jk} - g_{jk}\phi_{il} + g_{ik}\phi_{jl}\}\,.$$

Variedades con curvatura escalar constante

Resolveremos el sistema:

$$\tilde{\tau} - \tau_g(0) = 0, \quad \phi(y,0) = 0, \quad \partial_n \phi(y,0) = 0\,. \tag{1}$$

Hipótesis: ¿$\psi_{nn}(0) \neq 0$?

Calculamos

$$\tilde{R}_{ijkl} = |_0 R_{ijkl} + g_{jl}\phi_{ik} - g_{il}\phi_{jk} - g_{jk}\phi_{il} + g_{ik}\phi_{jl},$$
$$\tilde{\tau} - \tau_g(0) = |_0 \tilde{g}^{il}\tilde{g}^{jk}\{g_{jl}\phi_{ik} - g_{il}\phi_{jk} - g_{jk}\phi_{il} + g_{ik}\phi_{jl}\}\,.$$

Obtenemos $\psi_{nn}(0) = (2-2n) \neq 0$.

Variedades con curvatura escalar constante

Resolveremos el sistema:

$$\tilde{\tau} - \tau_g(0) = 0, \quad \phi(y,0) = 0, \quad \partial_n \phi(y,0) = 0\,. \tag{1}$$

Hipótesis: ¿$\psi_{nn}(0) \neq 0$?Sí$\longrightarrow$ existe ϕ

Calculamos

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ijkl} &= |_0 R_{ijkl} + g_{jl}\phi_{ik} - g_{il}\phi_{jk} - g_{jk}\phi_{il} + g_{ik}\phi_{jl}, \\ \tilde{\tau} - \tau_g(0) &= |_0 \tilde{g}^{il}\tilde{g}^{jk}\{g_{jl}\phi_{ik} - g_{il}\phi_{jk} - g_{jk}\phi_{il} + g_{ik}\phi_{jl}\}\,. \end{aligned}$$

Obtenemos $\psi_{nn}(0) = (2-2n) \neq 0$.

Variedades con curvatura escalar constante

Resolveremos el sistema:

$$\tilde{\tau} - \tau_g(0) = 0, \quad \phi(y,0) = 0, \quad \partial_n \phi(y,0) = 0\,. \tag{1}$$

Hipótesis: ¿$\psi_{nn}(0) \neq 0$?Sí$\longrightarrow$ existe ϕ

Calculamos

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ijkl} &= |_0 R_{ijkl} + g_{jl}\phi_{ik} - g_{il}\phi_{jk} - g_{jk}\phi_{il} + g_{ik}\phi_{jl}\,, \\ \tilde{\tau} - \tau_g(0) &= |_0 \tilde{g}^{il}\tilde{g}^{jk}\{g_{jl}\phi_{ik} - g_{il}\phi_{jk} - g_{jk}\phi_{il} + g_{ik}\phi_{jl}\}\,. \end{aligned}$$

Obtenemos $\psi_{nn}(0) = (2-2n) \neq 0$.

¿Es $\tilde{R}(0) = R(0)$?

Variedades con curvatura escalar constante

Resolveremos el sistema:

$$\tilde{\tau} - \tau_g(0) = 0, \quad \phi(y,0) = 0, \quad \partial_n \phi(y,0) = 0\,. \tag{1}$$

Hipótesis: ¿$\psi_{nn}(0) \neq 0$?Sí$\longrightarrow$ existe ϕ

Calculamos

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ijkl} &= |_0 R_{ijkl} + g_{jl}\phi_{ik} - g_{il}\phi_{jk} - g_{jk}\phi_{il} + g_{ik}\phi_{jl}, \\ \tilde{\tau} - \tau_g(0) &= |_0 \tilde{g}^{il}\tilde{g}^{jk}\{g_{jl}\phi_{ik} - g_{il}\phi_{jk} - g_{jk}\phi_{il} + g_{ik}\phi_{jl}\}\,. \end{aligned}$$

Obtenemos $\psi_{nn}(0) = (2-2n) \neq 0$.

¿Es $\tilde{R}(0) = R(0)$?

$$\begin{aligned} \phi(y,0) &= 0 \\ \partial_n \phi(y,0) &= 0 \end{aligned}$$

Variedades con curvatura escalar constante

Resolveremos el sistema:

$$\tilde{\tau} - \tau_g(0) = 0, \quad \phi(y,0) = 0, \quad \partial_n \phi(y,0) = 0 \,. \tag{1}$$

Hipótesis: ¿$\psi_{nn}(0) \neq 0$?Sí$\longrightarrow$ existe ϕ

Calculamos

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ijkl} &= |_0 R_{ijkl} + g_{jl}\phi_{ik} - g_{il}\phi_{jk} - g_{jk}\phi_{il} + g_{ik}\phi_{jl}, \\ \tilde{\tau} - \tau_g(0) &= |_0 \tilde{g}^{il}\tilde{g}^{jk}\{g_{jl}\phi_{ik} - g_{il}\phi_{jk} - g_{jk}\phi_{il} + g_{ik}\phi_{jl}\} \,. \end{aligned}$$

Obtenemos $\psi_{nn}(0) = (2-2n) \neq 0$.

¿Es $\tilde{R}(0) = R(0)$?

$$\left.\begin{array}{r} \phi(y,0) = 0 \\ \partial_n \phi(y,0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \phi_{ij}(0) = 0, j \neq n.$$

Variedades con curvatura escalar constante

Resolveremos el sistema:

$$\tilde{\tau} - \tau_g(0) = 0, \quad \phi(y,0) = 0, \quad \partial_n \phi(y,0) = 0\,. \tag{1}$$

Hipótesis: ¿$\psi_{nn}(0) \neq 0$?Sí$\longrightarrow$ existe ϕ

Calculamos

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ijkl} &= |_0 R_{ijkl} + g_{jl}\phi_{ik} - g_{il}\phi_{jk} - g_{jk}\phi_{il} + g_{ik}\phi_{jl}, \\ \tilde{\tau} - \tau_g(0) &= |_0 \tilde{g}^{il}\tilde{g}^{jk}\{g_{jl}\phi_{ik} - g_{il}\phi_{jk} - g_{jk}\phi_{il} + g_{ik}\phi_{jl}\}\,. \end{aligned}$$

Obtenemos $\psi_{nn}(0) = (2-2n) \neq 0$.

¿Es $\tilde{R}(0) = R(0)$?

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \phi(y,0) = 0 \\ \partial_n \phi(y,0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \phi_{ij}(0) = 0, j \neq n. \\ \tilde{\tau} - \tau_g(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \phi_{nn} = 0$$

Variedades con curvatura escalar constante

Resolveremos el sistema:

$$\tilde{\tau} - \tau_g(0) = 0, \quad \phi(y,0) = 0, \quad \partial_n \phi(y,0) = 0\,. \qquad (1)$$

Hipótesis: ¿$\psi_{nn}(0) \neq 0$?Sí$\longrightarrow$ existe ϕ

Calculamos

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ijkl} &= |_0 R_{ijkl} + g_{jl}\phi_{ik} - g_{il}\phi_{jk} - g_{jk}\phi_{il} + g_{ik}\phi_{jl}, \\ \tilde{\tau} - \tau_g(0) &= |_0 \tilde{g}^{il}\tilde{g}^{jk}\{g_{jl}\phi_{ik} - g_{il}\phi_{jk} - g_{jk}\phi_{il} + g_{ik}\phi_{jl}\}\,. \end{aligned}$$

Obtenemos $\psi_{nn}(0) = (2-2n) \neq 0$.

¿Es $\tilde{R}(0) = R(0)$?

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \phi(y,0) = 0 \\ \partial_n\phi(y,0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \phi_{ij}(0) = 0, j \neq n. \\ \tilde{\tau} - \tau_g(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \phi_{nn} = 0 \Rightarrow \tilde{R}(0) = R(0)$$

Variedades con curvatura escalar constante

Resolveremos el sistema:

$$\tilde{\tau} - \tau_g(0) = 0, \quad \phi(y,0) = 0, \quad \partial_n \phi(y,0) = 0\,. \tag{1}$$

Hipótesis: ¿$\psi_{nn}(0) \neq 0$?Sí$\longrightarrow$ existe ϕ

Calculamos

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{ijkl} &= |_0 R_{ijkl} + g_{jl}\phi_{ik} - g_{il}\phi_{jk} - g_{jk}\phi_{il} + g_{ik}\phi_{jl}\,,\\ \tilde{\tau} - \tau_g(0) &= |_0 \tilde{g}^{il}\tilde{g}^{jk}\{g_{jl}\phi_{ik} - g_{il}\phi_{jk} - g_{jk}\phi_{il} + g_{ik}\phi_{jl}\}\,.\end{aligned}$$

Obtenemos $\psi_{nn}(0) = (2-2n) \neq 0$.

¿Es $\tilde{R}(0) = R(0)$? Sí

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\phi(y,0)=0\\ \partial_n\phi(y,0)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \phi_{ij}(0)=0, j\neq n.\\ \tilde{\tau}-\tau_g(0)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \phi_{nn}=0 \Rightarrow \tilde{R}(0)=R(0)$$

Índice

Variedades conformemente llanas

Variedades conformemente llanas

Problema

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, A)$ un modelo con $W = 0$.

Variedades conformemente llanas

Problema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo con $W = 0$.

- ¿Existe una variedad Riemanniana conformemente llana (M, g) que realice el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$?

Variedades conformemente llanas

Problema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo con $W = 0$.

- ¿Existe una variedad Riemanniana conformemente llana (M, g) que realice el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$?
- Además, ¿puede escogerse (M, g) con curvatura escalar constante?

Variedades conformemente llanas

Problema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo con $W = 0$.

- ¿Existe una variedad Riemanniana conformemente llana (M, g) que realice el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$?
- Además, ¿puede escogerse (M, g) con curvatura escalar constante?

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo con $W = 0$, $n \geq 4$. Existe una variedad Riemanniana real analítica conformemente llana y con curvatura escalar constante que realiza $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ en un punto $P \in M$.

Variedades conformemente llanas

Problema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo con $W = 0$.

- ¿Existe una variedad Riemanniana conformemente llana (M, g) que realice el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$?
- Además, ¿puede escogerse (M, g) con curvatura escalar constante?

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ un modelo con $W = 0$, $n \geq 4$. Existe una variedad Riemanniana real analítica conformemente llana y con curvatura escalar constante que realiza $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ en un punto $P \in M$.

Variedades conformemente llanas

Problema

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, A)$ un modelo con $W = 0$.

- ¿Existe una variedad Riemanniana conformemente llana (M, g) que realice el modelo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, A)$?
- Además, ¿puede escogerse (M, g) con curvatura escalar constante?

Teorema

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, A)$ un modelo con $W = 0$, $n \geq 4$. Existe una variedad Riemanniana real analítica conformemente llana y con curvatura escalar constante que realiza $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, A)$ en un punto $P \in M$.

Variedades conformemente llanas

Problema

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, A)$ un modelo con $W = 0$.

- ¿Existe una variedad Riemanniana conformemente llana (M, g) que realice el modelo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, A)$?
- Además, ¿puede escogerse (M, g) con curvatura escalar constante?

Teorema

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, A)$ un modelo con $W = 0$, $n \geq 4$. Existe una variedad Riemanniana real analítica conformemente llana y con curvatura escalar constante que realiza $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, A)$ en un punto $P \in M$.

Variedades conformemente llanas

Demostración.

Variedades conformemente llanas

Demostración.

Paso 1. Construcción de g conformemente llana.

Variedades conformemente llanas

Demostración.

Paso 1. Construcción de g conformemente llana.

- $W = 0 \Rightarrow$ El tensor de Ricci determina la curvatura A

Variedades conformemente llanas

Demostración.

Paso 1. Construcción de g conformemente llana.

- $W = 0 \Rightarrow$ El tensor de Ricci determina la curvatura A
- Consideramos

$$g := (1 + \phi(x))\langle \cdot, \cdot \rangle$$

con ϕ cuadrática

Variedades conformemente llanas

Demostración.

Paso 1. Construcción de g conformemente llana.

- $W = 0 \Rightarrow$ El tensor de Ricci determina la curvatura A
- Consideramos

$$g := (1 + \phi(x))\langle \cdot, \cdot \rangle$$

con ϕ cuadrática

Variedades conformemente llanas

Demostración.

Paso 1. Construcción de g conformemente llana.

- $W = 0 \Rightarrow$ El tensor de Ricci determina la curvatura A
- Consideramos

$$g := (1 + \phi(x))\langle \cdot, \cdot \rangle$$

$$\text{con } \phi \text{ cuadrática} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ g \text{ no singular para } x \text{ pequeño} \\ \bullet\ g \text{ confomemente llana} \end{cases}$$

Variedades conformemente llanas

Demostración.

Paso 1. Construcción de g conformemente llana.

- $W = 0 \Rightarrow$ El tensor de Ricci determina la curvatura A
- Consideramos

$$g := (1 + \phi(x))\langle \cdot, \cdot \rangle$$

con ϕ cuadrática $\Rightarrow \begin{cases} \bullet\ g \text{ no singular para } x \text{ pequeño} \\ \bullet\ g \text{ confomemente llana} \end{cases}$

- Para que $\rho(0) = \rho_A$ tomamos

$$\phi = \sum_j \frac{\varepsilon_{jj}\tau + (2-2n)\rho_{jj}}{2(n-1)(n-2)} x_j^2 + \sum_{i<j} \frac{2}{2-n} \rho_{ij} x_i x_j$$

Variedades conformemente llanas

Demostración.

Paso 1. Construcción de g conformemente llana.

- $W=0 \Rightarrow$ El tensor de Ricci determina la curvatura A
- Consideramos

$$g := (1+\phi(x))\langle\cdot,\cdot\rangle$$

$$\text{con } \phi \text{ cuadrática} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ g \text{ no singular para } x \text{ pequeño} \\ \bullet\ g \text{ confomemente llana} \end{cases}$$

- Para que $\rho(0)=\rho_A$ tomamos

$$\phi = \sum_j \frac{\varepsilon_{jj}\tau + (2-2n)\rho_{jj}}{2(n-1)(n-2)} x_j^2 + \sum_{i<j} \frac{2}{2-n}\rho_{ij}x_i x_j$$

Paso 2. Modificación de g para obtener curvatura escalar constante.

Variedades conformemente llanas

Demostración.

Paso 1. Construcción de g conformemente llana.

- $W=0 \Rightarrow$ El tensor de Ricci determina la curvatura A
- Consideramos

$$g := (1+\phi(x))\langle\cdot,\cdot\rangle$$

con ϕ cuadrática $\Rightarrow \begin{cases} \bullet\ g \text{ no singular para } x \text{ pequeño} \\ \bullet\ g \text{ confomemente llana} \end{cases}$

- Para que $\rho(0)=\rho_A$ tomamos

$$\phi = \sum_j \frac{\varepsilon_{jj}\tau + (2-2n)\rho_{jj}}{2(n-1)(n-2)} x_j^2 + \sum_{i<j} \frac{2}{2-n}\rho_{ij}x_i x_j$$

Paso 2. Modificación de g para obtener curvatura escalar constante.

• Utilizamos Teorema de Cauchy-Kovalevskaya como en el teorema anterior.

Índice

Definiciones

Variedad casi-Hermítica

(M, g, J) es una variedad casi-Hermítica si

Definiciones

Variedad casi-Hermítica

(M, g, J) es una variedad casi-Hermítica si

1. (M, g) es una variedad Riemanniana

Definiciones

Variedad casi-Hermítica

(M, g, J) es una variedad casi-Hermítica si

1. (M, g) es una variedad Riemanniana
2. $J : TM \longrightarrow TM$ estructura compleja:
   $J^2 = -Id, \qquad g(J\cdot, J\cdot) = g(\cdot, \cdot)$

Definiciones

Variedad casi-Hermítica

(M, g, J) es una variedad casi-Hermítica si

1. (M, g) es una variedad Riemanniana
2. $J : TM \longrightarrow TM$ estructura compleja:
   $J^2 = -Id, \qquad g(J\cdot, J\cdot) = g(\cdot, \cdot)$

Variedad Hermítica

Sea (M, g, J) una variedad casi-Hermítica. (M, g, J) se dice Hermítica si J es integrable:

Definiciones

Variedad casi-Hermítica

(M, g, J) es una variedad casi-Hermítica si

1. (M, g) es una variedad Riemanniana
2. $J : TM \longrightarrow TM$ estructura compleja:
   $J^2 = -Id, \qquad g(J\cdot, J\cdot) = g(\cdot, \cdot)$

Variedad Hermítica

Sea (M, g, J) una variedad casi-Hermítica. (M, g, J) se dice Hermítica si J es integrable:

- Existen coordenadas locales en torno a cada punto $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ de modo que
  $\mathcal{J}\partial_{x_i} = \partial_{y_i}$ y $\mathcal{J}\partial_{y_i} = -\partial_{x_i}$.

Definiciones

Variedad casi-Hermítica

(M, g, J) es una variedad casi-Hermítica si

1. (M, g) es una variedad Riemanniana
2. $J : TM \longrightarrow TM$ estructura compleja:
   $J^2 = -Id, \qquad g(J\cdot, J\cdot) = g(\cdot, \cdot)$

Variedad Hermítica

Sea (M, g, J) una variedad casi-Hermítica. (M, g, J) se dice Hermítica si J es integrable:

- Existen coordenadas locales en torno a cada punto $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ de modo que $\mathcal{J}\partial_{x_i} = \partial_{y_i}$ y $\mathcal{J}\partial_{y_i} = -\partial_{x_i}$.
- Equivalentemente, el tensor de Nijenhuis se anula:
  $N_{\mathcal{J}}(x, y) := [x, y] + \mathcal{J}[\mathcal{J}x, y] + \mathcal{J}[x, \mathcal{J}y] - [\mathcal{J}x, \mathcal{J}y]$.

Modelos algebraicos complejos

Modelos algebraicos complejos

Modelo algebraico complejo

Llamamos modelo algebraico complejo al cuádruple $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$:

Modelos algebraicos complejos

Modelo algebraico complejo

Llamamos modelo algebraico complejo al cuádruple $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$:

1. V: un espacio vectorial de dimensión n.

Modelos algebraicos complejos

Modelo algebraico complejo

Llamamos modelo algebraico complejo al cuádruple $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$:

1. V: un espacio vectorial de dimensión n.
2. $\langle\cdot,\cdot\rangle$: un producto escalar en V.

Modelos algebraicos complejos

Modelo algebraico complejo

Llamamos modelo algebraico complejo al cuádruple $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$:

1. V: un espacio vectorial de dimensión n.
2. $\langle\cdot,\cdot\rangle$: un producto escalar en V.
3. J: estructura compleja ($J^2 = -Id$ y $J^*\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle$)

Modelos algebraicos complejos

Modelo algebraico complejo

Llamamos modelo algebraico complejo al cuádruple $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$:

1. V: un espacio vectorial de dimensión n.
2. $\langle\cdot,\cdot\rangle$: un producto escalar en V.
3. J: estructura compleja ($J^2 = -Id$ y $J^*\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle$)
4. A: un tensor curvatura algebraico.

Modelos algebraicos complejos

Modelo algebraico complejo

Llamamos modelo algebraico complejo al cuádruple $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$:

1. V: un espacio vectorial de dimensión n.
2. $\langle\cdot,\cdot\rangle$: un producto escalar en V.
3. J: estructura compleja ($J^2 = -Id$ y $J^*\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle$)
4. A: un tensor curvatura algebraico.

Operadores asociados a la curvatura

Modelos algebraicos complejos

Modelo algebraico complejo

Llamamos modelo algebraico complejo al cuádruple $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$:

1. V: un espacio vectorial de dimensión n.
2. $\langle\cdot,\cdot\rangle$: un producto escalar en V.
3. J: estructura compleja ($J^2 = -Id$ y $J^*\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle$)
4. A: un tensor curvatura algebraico.

Operadores asociados a la curvatura

Tensor de Ricci estrella

$\rho^\star(x,y) = \sum_i R(e_i, x, Je_i, Jy)$

Modelos algebraicos complejos

Modelo algebraico complejo

Llamamos modelo algebraico complejo al cuádruple $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$:

1. V: un espacio vectorial de dimensión n.
2. $\langle\cdot,\cdot\rangle$: un producto escalar en V.
3. J: estructura compleja ($J^2 = -Id$ y $J^*\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle$)
4. A: un tensor curvatura algebraico.

Operadores asociados a la curvatura

Tensor de Ricci estrella

$\rho^\star(x, y) = \sum_i R(e_i, x, Je_i, Jy)$

Curvatura escalar estrella

$\tau^\star = \sum_i \rho^\star(e_i, e_i)$

Índice

Variedades casi-Hermíticas

Variedades casi-Hermíticas

Problema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo.

Variedades casi-Hermíticas

Problema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo.

- ¿Existe una variedad casi-Hermítica $(M, g, \mathcal{J})$ que realice el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$?

Variedades casi-Hermíticas

Problema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo.

- ¿Existe una variedad casi-Hermítica $(M, g, \mathcal{J})$ que realice el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$?
- Además, ¿puede escogerse $(M, g, \mathcal{J})$ con curvatura escalar constante?

Variedades casi-Hermíticas

Problema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo.

- ¿Existe una variedad casi-Hermítica $(M, g, \mathcal{J})$ que realice el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$?
- Además, ¿puede escogerse $(M, g, \mathcal{J})$ con curvatura escalar constante?¿Y con curvatura escalar estrella constante?

Variedades casi-Hermíticas

Problema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo.

- ¿Existe una variedad casi-Hermítica $(M, g, \mathcal{J})$ que realice el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$?
- Además, ¿puede escogerse $(M, g, \mathcal{J})$ con curvatura escalar constante?¿Y con curvatura escalar estrella constante?

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo, $n \geq 4$. Existe una variedad casi-Hermítica real analítica $(M, g, \mathcal{J})$ que realiza $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ en un punto $P \in M$, y que además tiene

- curvatura escalar constante y
- curvatura escalar estrella constante.

Variedades casi-Hermíticas

Problema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo.

- ¿Existe una variedad casi-Hermítica $(M, g, \mathcal{J})$ que realice el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$?
- Además, ¿puede escogerse $(M, g, \mathcal{J})$ con curvatura escalar constante?¿Y con curvatura escalar estrella constante?

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo, $n \geq 4$. Existe una variedad casi-Hermítica real analítica $(M, g, \mathcal{J})$ que realiza $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ en un punto $P \in M$, y que además tiene

- curvatura escalar constante y
- curvatura escalar estrella constante.

Variedades casi-Hermíticas

Problema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo.

- ¿Existe una variedad casi-Hermítica $(M, g, \mathcal{J})$ que realice el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$?
- Además, ¿puede escogerse $(M, g, \mathcal{J})$ con curvatura escalar constante?¿Y con curvatura escalar estrella constante?

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo, $n \geq 4$. Existe una variedad casi-Hermítica real analítica $(M, g, \mathcal{J})$ que realiza $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ en un punto $P \in M$, y que además tiene

- curvatura escalar constante y
- curvatura escalar estrella constante.

Variedades casi-Hermíticas

Problema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo.

- ¿Existe una variedad casi-Hermítica $(M, g, \mathcal{J})$ que realice el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$?
- Además, ¿puede escogerse $(M, g, \mathcal{J})$ con curvatura escalar constante?¿Y con curvatura escalar estrella constante?

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo, $n \geq 4$. Existe una variedad casi-Hermítica real analítica $(M, g, \mathcal{J})$ que realiza $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ en un punto $P \in M$, y que además tiene

- curvatura escalar constante y
- curvatura escalar estrella constante.

Variedades casi-Hermíticas

Demostración.

Variedades casi-Hermíticas

Demostración.

Paso 1. Construimos (M, g) como en el teorema previo

Variedades casi-Hermíticas

Demostración.

Paso 1. Construimos (M, g) como en el teorema previo

Paso 2.

Variedades casi-Hermíticas

Demostración.

Paso 1. Construimos (M, g) como en el teorema previo

Paso 2.

- Extendemos J constante en los campos coordenados.

Variedades casi-Hermíticas

Demostración.
Paso 1. Construimos (M, g) como en el teorema previo
Paso 2.

- Extendemos J constante en los campos coordenados.
- Definimos ψ autoadjunta de modo que $\langle x, y\rangle = g(\psi x, \psi y)$ y tomamos $\tilde{J} = \psi J \psi^{-1}$.

Variedades casi-Hermíticas

Demostración.

Paso 1. Construimos (M, g) como en el teorema previo

Paso 2.

- Extendemos J constante en los campos coordenados.
- Definimos ψ autoadjunta de modo que $\langle x, y\rangle = g(\psi x, \psi y)$ y tomamos $\tilde{J} = \psi J \psi^{-1}$.

Paso 3.

Variedades casi-Hermíticas

Demostración.

Paso 1. Construimos (M, g) como en el teorema previo

Paso 2.

- Extendemos J constante en los campos coordenados.
- Definimos ψ autoadjunta de modo que $\langle x, y\rangle = g(\psi x, \psi y)$ y tomamos $\tilde{J} = \psi J \psi^{-1}$.

Paso 3.

1. Consideramos una variación de la métrica del tipo:

$$\tilde{g} = g + \xi\{dx_1 \otimes dx_1 - Jdx_1 \otimes Jdx_1\} + \eta\{dx_n \otimes dx_n - Jdx_n \otimes Jdx_n\}$$

con $\xi(P) = 0$ y $\eta(P) = 0$.

Variedades casi-Hermíticas

Demostración.

Paso 1. Construimos (M, g) como en el teorema previo

Paso 2.

- Extendemos J constante en los campos coordenados.
- Definimos ψ autoadjunta de modo que $\langle x, y\rangle = g(\psi x, \psi y)$ y tomamos $\tilde{J} = \psi J \psi^{-1}$.

Paso 3.

1. Consideramos una variación de la métrica del tipo:

$$\tilde{g} = g + \xi\{dx_1 \otimes dx_1 - Jdx_1 \otimes Jdx_1\} + \eta\{dx_n \otimes dx_n - Jdx_n \otimes Jdx_n\}$$

con $\xi(P) = 0$ y $\eta(P) = 0$.

Variedades casi-Hermíticas

Demostración.

Paso 1. Construimos (M, g) como en el teorema previo

Paso 2.

- Extendemos J constante en los campos coordenados.
- Definimos ψ autoadjunta de modo que $\langle x, y\rangle = g(\psi x, \psi y)$ y tomamos $\tilde{J} = \psi J \psi^{-1}$.

Paso 3.

1. Consideramos una variación de la métrica del tipo:

   $$\tilde{g} = g + \xi\{dx_1 \otimes dx_1 - Jdx_1 \otimes Jdx_1\} + \eta\{dx_n \otimes dx_n - Jdx_n \otimes Jdx_n\}$$

   con $\xi(P) = 0$ y $\eta(P) = 0$.
2. Aplicamos el Teorema de Cauchy-Kovalevskaya en su versión vectorial para garantizar la existencia de la métrica con τ y $\tau^\star$ constantes.

Índice

Variedades Hermíticas

Variedades Hermíticas

Problema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo.

Variedades Hermíticas

Problema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo.

- ¿Existe una variedad Hermítica $(M, g, \mathcal{J})$ que realiza el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$?

Variedades Hermíticas

Problema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo.

• ¿Existe una variedad Hermítica $(M, g, \mathcal{J})$ que realiza el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$?

NO

Variedades Hermíticas

Problema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo.

- ¿Existe una variedad Hermítica $(M, g, \mathcal{J})$ que realiza el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$?

NO

Identidad de Gray

El tensor curvatura de toda variedad Hermítica verifica:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & A(x,y,z,w) + A(Jx,Jy,Jz,Jw) \\ & - A(Jx,Jy,z,w) - A(x,y,Jz,Jw) - A(Jx,y,Jz,w) \\ & - A(x,Jy,z,Jw) - A(Jx,y,z,Jw) - A(x,Jy,Jz,w) \end{aligned}$$

Variedades Hermíticas

Problema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo.

- ¿Existe una variedad Hermítica $(M, g, \mathcal{J})$ que realiza el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$?

NO

Identidad de Gray

El tensor curvatura de toda variedad Hermítica verifica:

$$\begin{aligned} 0 &= A(x,y,z,w) + A(Jx,Jy,Jz,Jw) \\ &\quad -A(Jx,Jy,z,w) - A(x,y,Jz,Jw) - A(Jx,y,Jz,w) \\ &\quad -A(x,Jy,z,Jw) - A(Jx,y,z,Jw) - A(x,Jy,Jz,w) \end{aligned}$$

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo. Entonces A verifica la *Identidad de Gray* si y sólo si existe una variedad Hermítica $(M, g, \mathcal{J})$ que realiza $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ en un punto P.

Variedades Hermíticas

Problema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo.
- ¿Existe una variedad Hermítica $(M, g, \mathcal{J})$ que realiza el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$?

NO

Identidad de Gray

El tensor curvatura de toda variedad Hermítica verifica:

$$\begin{aligned} 0 = {} & A(x,y,z,w) + A(Jx,Jy,Jz,Jw) \\ & - A(Jx,Jy,z,w) - A(x,y,Jz,Jw) - A(Jx,y,Jz,w) \\ & - A(x,Jy,z,Jw) - A(Jx,y,z,Jw) - A(x,Jy,Jz,w) \end{aligned}$$

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo. Entonces *A verifica la Identidad de Gray* si y sólo si existe una variedad Hermítica $(M, g, \mathcal{J})$ que realiza $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ en un punto P.

Variedades Hermíticas

Problema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo.

- ¿Existe una variedad Hermítica $(M, g, \mathcal{J})$ que realiza el modelo $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$?

NO

Identidad de Gray

El tensor curvatura de toda variedad Hermítica verifica:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & A(x,y,z,w) + A(Jx,Jy,Jz,Jw) \\ & -A(Jx,Jy,z,w) - A(x,y,Jz,Jw) - A(Jx,y,Jz,w) \\ & -A(x,Jy,z,Jw) - A(Jx,y,z,Jw) - A(x,Jy,Jz,w) \end{aligned}$$

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo complejo. Entonces A verifica la *Identidad de Gray* si y sólo si existe una variedad Hermítica $(M, g, \mathcal{J})$ que realiza $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ en un punto P.

Descomposición de Tricerri-Vanhecke

Teorema. Sea $\mathcal{A} = \{\text{tensores curvatura algebraicos}\}$. Entonces $\mathcal{A}$ se descompone en $\mathcal{U}$-módulos irreducibles:
$\mathfrak{A} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 \oplus \mathcal{W}_5 \oplus \mathcal{W}_6 \oplus \mathcal{W}_7 \oplus \mathcal{W}_8 \oplus \mathcal{W}_9 \oplus \mathcal{W}_{10}$.

Descomposición de Tricerri-Vanhecke

Teorema. Sea $\mathcal{A} = \{\text{tensores curvatura algebraicos}\}$. Entonces $\mathcal{A}$ se descompone en $\mathcal{U}$-módulos irreducibles:
$\mathfrak{A} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 \oplus \mathcal{W}_5 \oplus \mathcal{W}_6 \oplus \mathcal{W}_7 \oplus \mathcal{W}_8 \oplus \mathcal{W}_9 \oplus \mathcal{W}_{10}$.

	$\dim(V) = 4$	$\dim(V) = 6$	$\dim(V) = 2n \geq 8$
$\mathcal{W}_1$	1	1	1
$\mathcal{W}_2$	3	8	$n^2 - 1$
$\mathcal{W}_3$	5	27	$\frac{1}{4}n^2(n-1)(n+3)$
$\mathcal{W}_4$	1	1	1
$\mathcal{W}_5$	0	8	$n^2 - 1$
$\mathcal{W}_6$	0	0	$\frac{1}{4}n^2(n+1)(n-3)$
$\mathcal{W}_7$	2	12	$\frac{1}{6}n^2(n^2-1)$
$\mathcal{W}_8$	6	12	$n^2 + n$
$\mathcal{W}_9$	2	6	$n^2 - n$
$\mathcal{W}_{10}$	0	30	$\frac{2}{3}n^2(n^2-4)$

Descomposición de Tricerri-Vanhecke

Teorema. Sea $\mathcal{A} = \{$tensores curvatura algebraicos$\}$. Entonces $\mathcal{A}$ se descompone en $\mathcal{U}$-módulos irreducibles:
$\mathfrak{A} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 \oplus \mathcal{W}_5 \oplus \mathcal{W}_6 \oplus \mathcal{W}_7 \oplus \mathcal{W}_8 \oplus \mathcal{W}_9 \oplus \mathcal{W}_{10}$.

	$\dim(V) = 4$	$\dim(V) = 6$	$\dim(V) = 2n \geq 8$
$\mathcal{W}_1$	1	1	1
$\mathcal{W}_2$	3	8	$n^2 - 1$
$\mathcal{W}_3$	5	27	$\frac{1}{4}n^2(n-1)(n+3)$
$\mathcal{W}_4$	1	1	1
$\mathcal{W}_5$	0	8	$n^2 - 1$
$\mathcal{W}_6$	0	0	$\frac{1}{4}n^2(n+1)(n-3)$
$\mathcal{W}_7$	2	12	$\frac{1}{6}n^2(n^2-1)$
$\mathcal{W}_8$	6	12	$n^2 + n$
$\mathcal{W}_9$	2	6	$n^2 - n$
$\mathcal{W}_{10}$	0	30	$\frac{2}{3}n^2(n^2-4)$

Descomposición de Tricerri-Vanhecke

Teorema. Sea $\mathcal{A} = \{$tensores curvatura algebraicos$\}$. Entonces $\mathcal{A}$ se descompone en $\mathcal{U}$-módulos irreducibles:
$\mathfrak{A} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 \oplus \mathcal{W}_5 \oplus \mathcal{W}_6 \oplus \mathcal{W}_7 \oplus \mathcal{W}_8 \oplus \mathcal{W}_9 \oplus \mathcal{W}_{10}$.

	$\dim(V) = 4$	$\dim(V) = 6$	$\dim(V) = 2n \geq 8$
$\mathcal{W}_1$	1	1	1
$\mathcal{W}_2$	3	8	$n^2 - 1$
$\mathcal{W}_3$	5	27	$\frac{1}{4}n^2(n-1)(n+3)$
$\mathcal{W}_4$	1	1	1
$\mathcal{W}_5$	0	8	$n^2 - 1$
$\mathcal{W}_6$	0	0	$\frac{1}{4}n^2(n+1)(n-3)$
$\mathcal{W}_7$	2	12	$\frac{1}{6}n^2(n^2-1)$
$\mathcal{W}_8$	6	12	$n^2 + n$
$\mathcal{W}_9$	2	6	$n^2 - n$
$\mathcal{W}_{10}$	0	30	$\frac{2}{3}n^2(n^2-4)$

Descomposición de Tricerri-Vanhecke

Teorema. Sea $\mathcal{A} = \{$tensores curvatura algebraicos$\}$. Entonces $\mathcal{A}$ se descompone en $\mathcal{U}$-módulos irreducibles:
$\mathfrak{A} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 \oplus \mathcal{W}_5 \oplus \mathcal{W}_6 \oplus \mathcal{W}_7 \oplus \mathcal{W}_8 \oplus \mathcal{W}_9 \oplus \mathcal{W}_{10}$.

1. $\tau \oplus \tau^\star : \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4 \approx \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.
2. Si $2n = 4$, $\rho_{0,+,S} : \mathcal{W}_2 \approx S^2_{0,+}(V^*)$.
3. Si $2n \geq 6$, $\rho_{0,+,S} \oplus \rho^\star_{0,+,S} : \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_5 \approx S^2_{0,+}(V^*) \oplus S^2_{0,+}(V^*)$.
4. $\mathcal{W}_3 = \{A \in \mathfrak{A} : A(x, y, z, w) = A(Jx, Jy, z, w)\ \forall x, y, z, w\} \cap \ker(\rho)$.
5. Si $2n \geq 8$, $\mathcal{W}_6 = \ker(\rho \oplus \rho^\star) \cap \{A \in \mathfrak{A} : J^*A = A\} \cap W_3^\perp$.
6. $\mathcal{W}_7 = \{A \in \mathfrak{A} : A(Jx, y, z, w) = A(x, y, Jz, w) \forall x, y, z, w\}$.
7. $\rho_{-,S} : \mathcal{W}_8 \approx S^2_-(V^*)$.
8. $\rho^\star_{-,\Lambda} : \mathcal{W}_9 \approx \Lambda^2_-(V^*)$.
9. Si $2n \geq 6$, $\mathcal{W}_{10} = \{A \in \mathfrak{A} : J^*A = -A\} \cap \ker(\rho \oplus \rho^\star)$.

Descomposición de Tricerri-Vanhecke

Descomposición del espacio de tensores curvatura en $\mathcal{U}$-modulos irreducibles:

$$W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \quad \oplus \quad W_4 \oplus W_5 \oplus W_6 \quad \oplus \quad W_7 \quad \oplus W_8 \oplus W_9 \oplus W_{10}$$

Descomposición de Tricerri-Vanhecke

Descomposición del espacio de tensores curvatura en $\mathcal{U}$-modulos irreducibles:

$$\underbrace{W_1 \oplus W_2 \oplus W_3}_{R(x,y)=R(Jx,Jy)} \quad \oplus \quad W_4 \oplus W_5 \oplus W_6 \quad \oplus \quad W_7 \quad \oplus W_8 \oplus W_9 \oplus W_{10}$$

Descomposición de Tricerri-Vanhecke

Descomposición del espacio de tensores curvatura en $\mathcal{U}$-modulos irreducibles:

$$\underbrace{\underbrace{W_1 \oplus W_2 \oplus W_3}_{R(x,y)=R(Jx,Jy)} \oplus W_4 \oplus W_5 \oplus W_6}_{\substack{R(x,y,z,v)=R(Jx,Jy,z,v)\\ +R(Jx,y,Jz,v)+R(Jx,y,z,Jv)}} \oplus W_7 \oplus W_8 \oplus W_9 \oplus W_{10}$$

Descomposición de Tricerri-Vanhecke

Descomposición del espacio de tensores curvatura en $\mathcal{U}$-modulos irreducibles:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{W_1 \oplus W_2 \oplus W_3}_{R(x,y)=R(Jx,Jy)} \oplus W_4 \oplus W_5 \oplus W_6}_{\begin{gathered}R(x,y,z,v)=R(Jx,Jy,z,v)\\ +R(Jx,y,Jz,v)+R(Jx,y,z,Jv)\end{gathered}} \oplus W_7}_{J^*R=R} \oplus \underbrace{W_8 \oplus W_9 \oplus W_{10}}_{J^*R=-R}$$

Descomposición de Tricerri-Vanhecke

Descomposición del espacio de tensores curvatura en $\mathcal{U}$-modulos irreducibles:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{W_1 \oplus W_2 \oplus W_3}_{R(x,y)=R(Jx,Jy)} \oplus W_4 \oplus W_5 \oplus W_6}_{\substack{R(x,y,z,v)=R(Jx,Jy,z,v)\\ +R(Jx,y,Jz,v)+R(Jx,y,z,Jv)}} \oplus W_7}_{J^*R=R} \oplus \underbrace{W_8 \oplus W_9 \oplus W_{10}}_{J^*R=-R}$$

Si R es el tensor curvatura de una variedad Hermítica verifica, entonces

$$R \in W_7^{\perp}$$

Expresión local de variedades Hermíticas

Expresión local de variedades Hermíticas

Coordenadas en $\mathbb{C}^n = R^{2n}$: $(u_1, \ldots, u_{2n}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$.

Expresión local de variedades Hermíticas

Coordenadas en $\mathbb{C}^n = R^{2n}$: $(u_1, \ldots, u_{2n}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$.
Estructura compleja integrable: $\mathcal{J}(\partial_{x_i}) = \partial_{y_i}$ y $\mathcal{J}(\partial_{y_i}) = -\partial_{x_i}$

Expresión local de variedades Hermíticas

Coordenadas en $\mathbb{C}^n = R^{2n}$: $(u_1, \ldots, u_{2n}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$.
Estructura compleja integrable: $\mathcal{J}(\partial_{x_i}) = \partial_{y_i}$ y $\mathcal{J}(\partial_{y_i}) = -\partial_{x_i}$
Métrica:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + 2\Theta_{ijkl}u^k u^l$$

Expresión local de variedades Hermíticas

Coordenadas en $\mathbb{C}^n = R^{2n}$: $(u_1, \ldots, u_{2n}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$.
Estructura compleja integrable: $\mathcal{J}(\partial_{x_i}) = \partial_{y_i}$ y $\mathcal{J}(\partial_{y_i}) = -\partial_{x_i}$
Métrica:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + 2\Theta_{ijkl} u^k u^l$$

Entonces:

$$\begin{aligned} R_P(\partial_{u_i}, \partial_{u_j}, \partial_{u_k}, \partial_{u_l}) &= \frac{1}{2}\{\partial_{u_i}\partial_{u_k} g_{jl} + \partial_{u_j}\partial_{u_l} g_{ik} - \partial_{u_i}\partial_{u_l} g_{jk} - \partial_{u_j}\partial_{u_k} g_{il}\} \\ &= \Theta_{ikjl} + \Theta_{jlik} - \Theta_{iljk} - \Theta_{jkil} \end{aligned}$$

Expresión local de variedades Hermíticas

Coordenadas en $\mathbb{C}^n = R^{2n}$: $(u_1, \ldots, u_{2n}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$.
Estructura compleja integrable: $\mathcal{J}(\partial_{x_i}) = \partial_{y_i}$ y $\mathcal{J}(\partial_{y_i}) = -\partial_{x_i}$
Métrica:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + 2\Theta_{ijkl} u^k u^l$$

Entonces:

$$\begin{aligned} R_P(\partial_{u_i}, \partial_{u_j}, \partial_{u_k}, \partial_{u_l}) &= \tfrac{1}{2}\{\partial_{u_i}\partial_{u_k} g_{jl} + \partial_{u_j}\partial_{u_l} g_{ik} - \partial_{u_i}\partial_{u_l} g_{jk} - \partial_{u_j}\partial_{u_k} g_{il}\} \\ &= \Theta_{ikjl} + \Theta_{jlik} - \Theta_{iljk} - \Theta_{jkil} \end{aligned}$$

Linealización del problema

Para $\Theta \in S^2_+(V^*) \otimes S^2(V^*)$. Definimos

$$\mathcal{L} : S^2_+(V^*) \otimes S^2(V^*) \to \mathfrak{A}$$

como la aplicación $\mathcal{U}$-equivariante:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Theta)(x, y, z, w) \quad := \quad & \Theta(x, z, y, w) + \Theta(y, w, x, z) \\ & -\Theta(x, w, y, z) - \Theta(y, z, x, w) \end{aligned}$$

Expresión local de variedades Hermíticas

Coordenadas en $\mathbb{C}^n = R^{2n}$: $(u_1, \ldots, u_{2n}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$.
Estructura compleja integrable: $\mathcal{J}(\partial_{x_i}) = \partial_{y_i}$ y $\mathcal{J}(\partial_{y_i}) = -\partial_{x_i}$
Métrica:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + 2\Theta_{ijkl} u^k u^l$$

Entonces:

$$\begin{aligned} R_P(\partial_{u_i}, \partial_{u_j}, \partial_{u_k}, \partial_{u_l}) &= \tfrac{1}{2}\{\partial_{u_i}\partial_{u_k} g_{jl} + \partial_{u_j}\partial_{u_l} g_{ik} - \partial_{u_i}\partial_{u_l} g_{jk} - \partial_{u_j}\partial_{u_k} g_{il}\} \\ &= \Theta_{ikjl} + \Theta_{jlik} - \Theta_{iljk} - \Theta_{jkil} \end{aligned}$$

Linealización del problema

Para $\Theta \in S^2_+(V^*) \otimes S^2(V^*)$. Definimos

$$\mathcal{L} : S^2_+(V^*) \otimes S^2(V^*) \to \mathfrak{A}$$

como la aplicación $\mathcal{U}$-equivariante:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Theta)(x, y, z, w) \quad := \quad & \Theta(x, z, y, w) + \Theta(y, w, x, z) \\ & -\Theta(x, w, y, z) - \Theta(y, z, x, w) \end{aligned}$$

Expresión local de variedades Hermíticas

Coordenadas en $\mathbb{C}^n = R^{2n}$: $(u_1, \ldots, u_{2n}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$.
Estructura compleja integrable: $\mathcal{J}(\partial_{x_i}) = \partial_{y_i}$ y $\mathcal{J}(\partial_{y_i}) = -\partial_{x_i}$
Métrica:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + 2\Theta_{ijkl} u^k u^l$$

Entonces:

$$\begin{aligned} R_P(\partial_{u_i}, \partial_{u_j}, \partial_{u_k}, \partial_{u_l}) &= \tfrac{1}{2}\{\partial_{u_i}\partial_{u_k} g_{jl} + \partial_{u_j}\partial_{u_l} g_{ik} - \partial_{u_i}\partial_{u_l} g_{jk} - \partial_{u_j}\partial_{u_k} g_{il}\} \\ &= \Theta_{ikjl} + \Theta_{jlik} - \Theta_{iljk} - \Theta_{jkil} \end{aligned}$$

Linealización del problema

Para $\Theta \in S^2_+(V^*) \otimes S^2(V^*)$. Definimos

$$\mathcal{L} : S^2_+(V^*) \otimes S^2(V^*) \to \mathfrak{A}$$

como la aplicación $\mathcal{U}$-equivariante:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Theta)(x, y, z, w) \quad := \quad & \Theta(x, z, y, w) + \Theta(y, w, x, z) \\ & - \Theta(x, w, y, z) - \Theta(y, z, x, w) \end{aligned}$$

Expresión local de variedades Hermíticas

Coordenadas en $\mathbb{C}^n = R^{2n}$: $(u_1, \ldots, u_{2n}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$.
Estructura compleja integrable: $\mathcal{J}(\partial_{x_i}) = \partial_{y_i}$ y $\mathcal{J}(\partial_{y_i}) = -\partial_{x_i}$
Métrica:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + 2\Theta_{ijkl} u^k u^l$$

Entonces:

$$\begin{aligned} R_P(\partial_{u_i}, \partial_{u_j}, \partial_{u_k}, \partial_{u_l}) &= \tfrac{1}{2}\{\partial_{u_i}\partial_{u_k} g_{jl} + \partial_{u_j}\partial_{u_l} g_{ik} - \partial_{u_i}\partial_{u_l} g_{jk} - \partial_{u_j}\partial_{u_k} g_{il}\} \\ &= \Theta_{ikjl} + \Theta_{jlik} - \Theta_{iljk} - \Theta_{jkil} \end{aligned}$$

Linealización del problema

Para $\Theta \in S^2_+(V^*) \otimes S^2(V^*)$. Definimos

$$\mathcal{L} : S^2_+(V^*) \otimes S^2(V^*) \to \mathfrak{A}$$

como la aplicación $\mathcal{U}$-equivariante:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Theta)(x, y, z, w) \quad := \quad & \Theta(x, z, y, w) + \Theta(y, w, x, z) \\ & -\Theta(x, w, y, z) - \Theta(y, z, x, w) \end{aligned}$$

Realización geométrica por variedades Hermíticas

Conclusión

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo algebraico. Entonces podemos realizarlo si (y sólo si)

$$A \in Rango(\mathcal{L})$$

Realización geométrica por variedades Hermíticas

Conclusión

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo algebraico. Entonces podemos realizarlo si (y sólo si)

$$A \in Rango(\mathcal{L})$$

Objetivo final

Comprobar que

$$Rango(\mathcal{L}) = W_7^{\perp}$$

Realización geométrica por variedades Hermíticas

Conclusión

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo algebraico. Entonces podemos realizarlo si (y sólo si)

$$A \in Rango(\mathcal{L})$$

Objetivo final

Comprobar que

$$Rango(\mathcal{L}) = W_7^{\perp}$$

- Ya sabemos $Rango(\mathcal{L}) \subset W_7^{\perp}$

Realización geométrica por variedades Hermíticas

Conclusión

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo algebraico. Entonces podemos realizarlo si (y sólo si)

$$A \in Rango(\mathcal{L})$$

Objetivo final

Comprobar que

$$Rango(\mathcal{L}) = W_7^{\perp}$$

- Ya sabemos $Rango(\mathcal{L}) \subset W_7^{\perp}$
- Para probar que $W_7^{\perp} \subset Rango(\mathcal{L})$ buscaremos ejemplos que tengan componentes en los 9 subespacios invariantes irreducibles de la descomposición de Tricerri y Vanhecke:

$$W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 \oplus W_5 \oplus W_6 \oplus W_8 \oplus W_9 \oplus W_{10}$$

Ejemplos que recubren los 9 espacios irreducibles

Métrica

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_8	W_9	W_{10}

Ejemplos que recubren los 9 espacios irreducibles

Métrica

$$g = \delta - \varepsilon x_1^2(dx_1 \otimes dx_1 + dy_1 \otimes dy_1) - \varrho x_1^2(dx_2 \otimes dx_2 + dy_2 \otimes dy_2)$$

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_8	W_9	W_{10}

Ejemplos que recubren los 9 espacios irreducibles

Métrica

$$g = \delta - \varepsilon x_1^2(dx_1 \otimes dx_1 + dy_1 \otimes dy_1) - \varrho x_1^2(dx_2 \otimes dx_2 + dy_2 \otimes dy_2)$$

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_8	W_9	W_{10}
✓	✓		✓			✓		

Ejemplos que recubren los 9 espacios irreducibles

Métrica

$$g = \delta - \varepsilon x_1^2(dx_1 \otimes dx_1 + dy_1 \otimes dy_1) - \varrho x_1^2(dx_2 \otimes dx_2 + dy_2 \otimes dy_2)$$
$$g = \delta - 2\varepsilon x_1^2(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2)$$

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_8	W_9	W_{10}
✓	✓		✓			✓		

Ejemplos que recubren los 9 espacios irreducibles

Métrica

$$g = \delta - \varepsilon x_1^2(dx_1 \otimes dx_1 + dy_1 \otimes dy_1) - \varrho x_1^2(dx_2 \otimes dx_2 + dy_2 \otimes dy_2)$$

$$g = \delta - 2\varepsilon x_1^2(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2)$$

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_8	W_9	W_{10}
✓	✓		✓			✓	✓	

Ejemplos que recubren los 9 espacios irreducibles

Métrica

$$g = \delta - \varepsilon x_1^2 (dx_1 \otimes dx_1 + dy_1 \otimes dy_1) - \varrho x_1^2 (dx_2 \otimes dx_2 + dy_2 \otimes dy_2)$$
$$g = \delta - 2\varepsilon x_1^2 (dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2)$$
$$g = \delta - 2\varrho x_1^2 (dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2) - 2\varepsilon x_1^2 (dx_2 \circ dx_3 + dy_2 \circ dy_3)$$

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_8	W_9	W_{10}
✓	✓		✓			✓	✓	

Ejemplos que recubren los 9 espacios irreducibles

Métrica

$$g = \delta - \varepsilon x_1^2(dx_1 \otimes dx_1 + dy_1 \otimes dy_1) - \varrho x_1^2(dx_2 \otimes dx_2 + dy_2 \otimes dy_2)$$
$$g = \delta - 2\varepsilon x_1^2(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2)$$
$$g = \delta - 2\varrho x_1^2(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2) - 2\varepsilon x_1^2(dx_2 \circ dx_3 + dy_2 \circ dy_3)$$

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_8	W_9	W_{10}
✓	✓		✓	✓		✓	✓	

Ejemplos que recubren los 9 espacios irreducibles

Métrica

$$g = \delta - \varepsilon x_1^2(dx_1 \otimes dx_1 + dy_1 \otimes dy_1) - \varrho x_1^2(dx_2 \otimes dx_2 + dy_2 \otimes dy_2)$$
$$g = \delta - 2\varepsilon x_1^2(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2)$$
$$g = \delta - 2\varrho x_1^2(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2) - 2\varepsilon x_1^2(dx_2 \circ dx_3 + dy_2 \circ dy_3)$$
$$g = \delta - 2\{x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2\}(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2)$$

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_8	W_9	W_{10}
✓	✓		✓	✓		✓	✓	

Ejemplos que recubren los 9 espacios irreducibles

Métrica

$$g = \delta - \varepsilon x_1^2(dx_1 \otimes dx_1 + dy_1 \otimes dy_1) - \varrho x_1^2(dx_2 \otimes dx_2 + dy_2 \otimes dy_2)$$
$$g = \delta - 2\varepsilon x_1^2(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2)$$
$$g = \delta - 2\varrho x_1^2(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2) - 2\varepsilon x_1^2(dx_2 \circ dx_3 + dy_2 \circ dy_3)$$
$$g = \delta - 2\{x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2\}(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2)$$

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_8	W_9	W_{10}
✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	

Ejemplos que recubren los 9 espacios irreducibles

Métrica

$$g = \delta - \varepsilon x_1^2(dx_1 \otimes dx_1 + dy_1 \otimes dy_1) - \varrho x_1^2(dx_2 \otimes dx_2 + dy_2 \otimes dy_2)$$
$$g = \delta - 2\varepsilon x_1^2(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2)$$
$$g = \delta - 2\varrho x_1^2(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2) - 2\varepsilon x_1^2(dx_2 \circ dx_3 + dy_2 \circ dy_3)$$
$$g = \delta - 2\{x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2\}(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2)$$
$$g = \delta - 2\{x_1^2 - y_1^2\}(dx_2 \circ dx_3 + dy_2 \circ dy_3)$$

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_8	W_9	W_{10}
✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	

Ejemplos que recubren los 9 espacios irreducibles

Métrica

$$g = \delta - \varepsilon x_1^2(dx_1 \otimes dx_1 + dy_1 \otimes dy_1) - \varrho x_1^2(dx_2 \otimes dx_2 + dy_2 \otimes dy_2)$$
$$g = \delta - 2\varepsilon x_1^2(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2)$$
$$g = \delta - 2\varrho x_1^2(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2) - 2\varepsilon x_1^2(dx_2 \circ dx_3 + dy_2 \circ dy_3)$$
$$g = \delta - 2\{x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2\}(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2)$$
$$g = \delta - 2\{x_1^2 - y_1^2\}(dx_2 \circ dx_3 + dy_2 \circ dy_3)$$

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_8	W_9	W_{10}
✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓

Ejemplos que recubren los 9 espacios irreducibles

Métrica

$$g = \delta - \varepsilon x_1^2(dx_1 \otimes dx_1 + dy_1 \otimes dy_1) - \varrho x_1^2(dx_2 \otimes dx_2 + dy_2 \otimes dy_2)$$
$$g = \delta - 2\varepsilon x_1^2(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2)$$
$$g = \delta - 2\varrho x_1^2(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2) - 2\varepsilon x_1^2(dx_2 \circ dx_3 + dy_2 \circ dy_3)$$
$$g = \delta - 2\{x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2\}(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2)$$
$$g = \delta - 2\{x_1^2 - y_1^2\}(dx_2 \circ dx_3 + dy_2 \circ dy_3)$$
$$g = \delta - 4\{x_1x_2 + y_1y_2\}(dx_3 \circ dx_4 + dy_3 \circ dy_4)$$

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_8	W_9	W_{10}
✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓

Ejemplos que recubren los 9 espacios irreducibles

Métrica

$$g = \delta - \varepsilon x_1^2(dx_1 \otimes dx_1 + dy_1 \otimes dy_1) - \varrho x_1^2(dx_2 \otimes dx_2 + dy_2 \otimes dy_2)$$
$$g = \delta - 2\varepsilon x_1^2(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2)$$
$$g = \delta - 2\varrho x_1^2(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2) - 2\varepsilon x_1^2(dx_2 \circ dx_3 + dy_2 \circ dy_3)$$
$$g = \delta - 2\{x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2\}(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2)$$
$$g = \delta - 2\{x_1^2 - y_1^2\}(dx_2 \circ dx_3 + dy_2 \circ dy_3)$$
$$g = \delta - 4\{x_1 x_2 + y_1 y_2\}(dx_3 \circ dx_4 + dy_3 \circ dy_4)$$

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_8	W_9	W_{10}
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Ejemplos que recubren los 9 espacios irreducibles

Métrica

$$g = \delta - \varepsilon x_1^2(dx_1 \otimes dx_1 + dy_1 \otimes dy_1) - \varrho x_1^2(dx_2 \otimes dx_2 + dy_2 \otimes dy_2)$$
$$g = \delta - 2\varepsilon x_1^2(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2)$$
$$g = \delta - 2\varrho x_1^2(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2) - 2\varepsilon x_1^2(dx_2 \circ dx_3 + dy_2 \circ dy_3)$$
$$g = \delta - 2\{x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2\}(dx_1 \circ dx_2 + dy_1 \circ dy_2)$$
$$g = \delta - 2\{x_1^2 - y_1^2\}(dx_2 \circ dx_3 + dy_2 \circ dy_3)$$
$$g = \delta - 4\{x_1 x_2 + y_1 y_2\}(dx_3 \circ dx_4 + dy_3 \circ dy_4)$$

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_8	W_9	W_{10}
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

CONCLUSIÓN: Todo modelo algebraico que cumple la identidad de Gray es realizable en un punto de una variedad Hermítica.

Realización de modelos Kähler

Realización de modelos Kähler

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo algebraico complejo. Entonces es realizable en un punto de una variedad Kähler ($\nabla J = 0$) si y sólo si verifica la identidad de Kähler:

$$A(Jx, Jy) = A(x, y) \forall x, y$$

Realización de modelos Kähler

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo algebraico complejo. Entonces es realizable en un punto de una variedad Kähler ($\nabla J = 0$) si y sólo si verifica la identidad de Kähler:

$$A(Jx, Jy) = A(x, y) \forall x, y$$

Demostración.

Realización de modelos Kähler

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo algebraico complejo. Entonces es realizable en un punto de una variedad Kähler ($\nabla J = 0$) si y sólo si verifica la identidad de Kähler:

$$A(Jx, Jy) = A(x, y) \forall x, y$$

Demostración.

Paso 1. Construimos (M, g) como en el caso Hermítico general.

Métrica:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + 2\Theta_{ijkl} u^k u^l$$

Realización de modelos Kähler

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo algebraico complejo. Entonces es realizable en un punto de una variedad Kähler ($\nabla J = 0$) si y sólo si verifica la identidad de Kähler:

$$A(Jx, Jy) = A(x, y)\forall x, y$$

Demostración.

Paso 1. Construimos (M, g) como en el caso Hermítico general. Métrica:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + 2\Theta_{ijkl}u^k u^l$$

Paso 2. La aplicación lineal $\Theta \to d\Omega_{g_\Theta}$ define una aplicación lineal

$$K_J : S^2_+(V^*) \otimes S^2(V^*) \to \Lambda^3(V^*) \otimes V^*$$

dada por

$$\{(K_J\Theta)(x, y, z)\}(w) := \Theta(x, Jy, z, w) + \Theta(y, Jz, x, w) + \Theta(z, Jx, y, w)\,.$$

Realización de modelos Kähler

Realización de modelos Kähler

- $\ker(K_J)$ es invariante bajo la acción de $\mathcal{U}$.

Realización de modelos Kähler

- $\ker(K_J)$ es invariante bajo la acción de $\mathcal{U}$.
- $\Theta \in \ker(K_J)$ si y sólo si g_Θ es Kähler.

Realización de modelos Kähler

- $\ker(K_J)$ es invariante bajo la acción de $\mathcal{U}$.
- $\Theta \in \ker(K_J)$ si y sólo si g_Θ es Kähler.
- $$\mathcal{L} : \ker(K_J) \to W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$$

  es equivariante con respecto a la acción de $\mathcal{U}$.

Realización de modelos Kähler

- $\ker(K_J)$ es invariante bajo la acción de $\mathcal{U}$.
- $\Theta \in \ker(K_J)$ si y sólo si g_Θ es Kähler.
- $$\mathcal{L} : \ker(K_J) \to W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$$
  es equivariante con respecto a la acción de $\mathcal{U}$.

Tomamos $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{C}^{\frac{n-2}{2}}$, cuya métrica tiene componentes en W_1, W_2 y W_3.

Realización de modelos Kähler

- $\ker(K_J)$ es invariante bajo la acción de $\mathcal{U}$.
- $\Theta \in \ker(K_J)$ si y sólo si g_Θ es Kähler.
- $$\mathcal{L} : \ker(K_J) \to W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$$
  es equivariante con respecto a la acción de $\mathcal{U}$.

Tomamos $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{C}^{\frac{n-2}{2}}$, cuya métrica tiene componentes en W_1, W_2 y W_3.

CONCLUSIÓN: $\mathcal{L}_{|\ker(K_J)}$ es sobre en $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

Otros resultados

Otros resultados

Variedades almost Kähler

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J, A)$ un modelo algebraico complejo. Si $\tau > \tau^\star$ entonces el modelo no es realizable por una variedad almost Kähler ($d\Omega = 0$).

Bibliografía

- L. Evans, **Partial Differential Equations**, Graduate Texts in Mathematics **19**, American Mathematical Society, Providence R. I.
- M. Brozos-Vázquez, P. Gilkey, H. Kang, S. Nikčević, and G. Weingart, 'Geometric realizations of curvature models by manifolds with constant scalar curvature', *Differential Geom. Appl.*, doi:10.1016/j.difgeo.2009.05.002 (arXiv:0811.1651).
- M. Brozos-Vázquez, P. Gilkey, H. Kang, and S. Nikčević, 'Geometric Realizations of Hermitian curvature models', *J. Math. Soc. Japan*, a aparecer (arXiv:0812.2743).
- M. Brozos-Vázquez, P. Gilkey, S. Nikčević, and R. Vázquez-Lorenzo, 'Geometric Realizations of para-Hermitian curvature models', *Results Math.*, a aparecer (arXiv:0902.1697)
- M. Brozos-Vázquez, P. Gilkey, E. Merino-Gayoso, 'Geometric Realizations of Kähler models', pendiente de publicación.

¡Muchas gracias!

Realización geométrica de la curvatura

Miguel Brozos Vázquez

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Trabajo realizado con: P. Gilkey, H. Kang, E. Merino, S. Nikčević, R. Vázquez Lorenzo y G. Weingart

Workshop on Differential Geometry and Relativity