USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

SEMINARIO DE INICIACIÓN Á INVESTIGACIÓN
Instituto de Matemáticas

Ecuacións con simetría

Miguel Domínguez Vázquez
Departamento de Xeometría e Topoloxía

12 de decembro de 2012

Desde antigo, o concepto de simetría ten sido unha fonte de inspiración para artistas, enxeñeiros e científicos. Aínda que a idea de simetría está xa presente nas Matemáticas desde as súas orixes, a súa formulación matemática precisa, que ten que ver coa existencia dun grupo de transformacións, comezouse a forxar no século XIX. Especialmente influentes foron os traballos do matemático francés Évariste Galois (1811-1832), do noruego Sophus Lie (1842-1899), do alemán Felix Klein (1849-1925) e do francés Élie Cartan (1869-1951).

O propósito deste artigo é explicar dun xeito elemental e intuitivo que entendemos por grupo de simetrías dunha ecuación (ou sistema de ecuacións) e ver como a existencia de simetrías pode axudarnos a resolver tal ecuación. Para unha introdución máis pormenorizada a este interesante campo, pódense consultar os libros da bibliografía.

A idea de Galois. Simetría nas ecuacións alxébricas

Durante moito tempo os matemáticos preguntáronse se sería posible resolver calquera ecuación alxébrica (é dicir, polinómica) nunha variable en termos de operacións elementais e radicais. A comezos do século XIX sabíase que isto era posible para ecuacións de ata orde 4: hai fórmulas concretas que nos dan todas as posibles solucións de xeito exacto. Pero, que pasaría para ordes superiores?

Motivado por esta cuestión, Galois (cando aínda non tiña vinte anos) desenvolveu unha profunda teoría que vén a relacionar o estudo de corpos co de grupos e que, en particular, dá unha resposta á pregunta anterior. Así, se $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ é unha ecuación alxébrica nunha variable e con coeficientes racionais, esta é resoluble por radicais se e só se o seu grupo de Galois é resoluble. Expliquemos estes dous últimos conceptos. Por unha banda, que un grupo G sexa *resoluble* quere dicir que existe unha cadea de subgrupos $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_k = \{1\}$ rematando no grupo trivial e tal que G_{i+1} sexa subgrupo normal de G_i e o grupo cociente G_i/G_{i+1} sexa abeliano. Por outra banda, o *grupo de Galois* da ecuación vén sendo certo grupo de transformacións (i.e. aplicacións bixectivas) do conxunto de solucións da ecuación en si mesmo. A súa

PALABRAS CLAVE: simetría, ecuacións alxébricas, ecuacións diferenciais, grupo de transformacións, acción, grupo de Lie

definición precisa fai uso do concepto de extensión de corpos, pero non nos interesa aquí profundizar neste aspecto. Chegue con dicir que, para algunhas ecuacións polinómicas de grao n con coeficientes enteiros, o seu grupo de Galois é o grupo de permutacións das súas n raíces complexas, é dicir, o denominado grupo simétrico S_n. Así, como o grupo simétrico S_n é resoluble se e só se $n = 1$, 2, 3 ou 4, só é posible atopar unha fórmula xenérica de resolución para aquelas ecuacións polinómicas dunha variable de grao ó sumo 4.

Galois inspirou a Lie. Simetría nas ecuacións diferenciais

O traballo de Galois sobre ecuacións alxébricas fixo que Lie se preguntase se sería posible estender as ideas de Galois ó caso de ecuacións diferenciais. Se considerando e analizando o grupo de Galois dunha ecuación alxébrica se conseguía información sobre a resolución de tal ecuación, sería posible obter información sobre a resolubilidade de ecuacións diferenciais se se considera un certo grupo de simetrías? A resposta que deu Lie en 1874 foi afirmativa, aínda que a teoría no caso diferencial é máis complexa ca no caso alxébrico.

O exemplo máis sinxelo de simetría nunha ecuación diferencial é seguramente o seguinte. Consideremos a ecuación

$$\frac{dy}{dt} = f(t),$$

onde f é unha función real de variable real. Sabemos que as solucións desta EDO veñen dadas por

$$y = F_c(t) = \int f(t)dt + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Pois ben, esta constante c arbitraria é o reflexo da simetría da ecuación. Precisemos isto. Para cada $b \in \mathbb{R}$ podemos considerar as transformacións φ_b do conxunto abstracto de solucións en si mesmo que consisten en sumar b:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_b\colon & \{\text{solucións}\} & \to & \{\text{solucións}\} \\ & F_c & \mapsto & F_c + b. \end{array}$$

E así, $G = \{\varphi_b : b \in \mathbb{R}\}$ resulta ser un grupo abeliano cuxa operación é a composición (fíxate que $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{a+b}$ e φ_0=id). Así pois, dicimos que o grupo G *actúa* no conxunto de solucións, é dicir, cada φ_b leva solucións en solucións. O grupo G é un grupo 1-paramétrico de simetrías da ecuación anterior.

Formalmente, unha *acción* dun grupo G nun espazo X é unha aplicación

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \to & X \\ (g, x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

tal que $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ e $1 \cdot x = x$, para todo g, $h \in G$ e todo $x \in X$. Outra forma moi conveniente de repensar unha acción é así: cada $g \in G$ define unha transformación bixectiva $\varphi_g\colon X \to X$ dada por $\varphi_g(x) = g \cdot x$. Isto é, cada elemento do grupo pódese ver coma unha transformación do espazo X. A existencia dunha acción nun espazo X é a formalización da existencia de simetrías en X. Aquí X é un espazo calquera: dependendo do contexto pode ser simplemente un conxunto, un espazo vectorial, unha variedade... E G é un grupo, pero pode ter algunha estrutura adicional. Por exemplo, se X ten unha estrutura diferenciable, a G adóitaselle pedir que teña tamén unha estrutura diferenciable compatible coa operación de grupo (i.e. que a operación de grupo sexa diferenciable). Neste caso, estamos falando dun *grupo de Lie*.

En xeral, por *simetría* dunha ecuación ou sistema de ecuacións (alxébricas, diferenciais, ou do tipo que sexa) entenderemos unha transformación bixectiva do conxunto de solucións en si mesmo. Ás veces convén restrinxirse a simetrías máis especiais. Por exemplo, a ecuación alxébrica $x^2 + y^2 = 1$, que ten como solucións os puntos da circunferencia unidade de $\mathbb{R}^2$, admite unha cantidade enorme de simetrías que nin sequera son continuas. Segundo o problema que se considere, pode interesar restrinxirnos a aquelas simetrías que sexan difeomorfismos ou incluso a aquelas que sexan transformacións lineais de $\mathbb{R}^2$; neste último caso, o grupo de simetrías é o grupo das matrices ortogonais $O(2)$.

Un exemplo de simetría nunha EDO

Para concluír, amosaremos nun exemplo sinxelo, pero non trivial, como a existencia de simetrías nunha ecuación diferencial nos permite resolvela. O problema de como encontrar as simetrías dunha ecuación é moi importante e, para o caso dun grupo de simetrías diferenciable, é máis sinxelo do que un puidera crer; o lector interesado pode consultar [2, §2.4] para máis información.

Consideremos a EDO dada por

$$\frac{du}{dx} = \frac{u^2 - x}{u(u^2 + x)},$$

que está definida no conxunto M dos pares $(x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tales que $u \neq 0$ e $x \neq -u^2$. A variable independente é a x e a dependente é a u. Supoñamos que atopamos a seguinte simetría da ecuación:

$$(x, u) \mapsto (\lambda^2 x, \lambda u), \qquad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Isto quere dicir que, se $u(x)$ é unha solución da EDO, entón $\tilde{u}(\tilde{x})$ tamén o é, onde $\tilde{u} = \lambda u$ e $\tilde{x} = \lambda^2 x$. Formalmente, o que temos é a seguinte acción do grupo multiplicativo de Lie $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ no conxunto M onde temos definida a EDO:

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \to & M \\ (\lambda, (x, u)) & \mapsto & \lambda \cdot (x, u) = (\lambda^2 x, \lambda u). \end{array}$$

Unha vez atopada unha simetría, hai que calcular o seu *xerador infinitesimal*. De xeito máis preciso, trátase de atopar a *álxebra de Lie* de G (que basicamente é o espazo tanxente a G no elemento neutro 1), xunto coa acción infinitesimal inducida. Intuitivamente, consiste no seguinte. Para cada $(x, u) \in M$, existe unha única *órbita* da acción de G pasando por (x, u). No noso caso, esta órbita é a traza da curva $\alpha(t) = (t^2 x, tu)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pois ben, trátase de saber cal é o vector tanxente a esta curva no punto $(x, u) = \alpha(1)$. Evidentemente, trátase do vector $\mathbf{v}_{(x,u)} = \alpha'(1) = (2tx, u)|_{t=1} = (2x, u)$. En notación diferencial, $\mathbf{v}_{(x,u)} = 2x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}$.

O paso clave e que pode resultar máis complicado é atopar o cambio de variables apropiado, baseándose no traballo feito. Buscaremos unhas novas variables independente t e dependente y nas cales a EDO adopte a forma máis sinxela de resolver: $\frac{dy}{dt} = f(t)$. Para isto, o cambio de variables $(x, u) \mapsto (t(x, u), y(x, u))$ terá que transformar a simetría da EDO orixinal na simetría estándar da ecuación $\frac{dy}{dt} = f(t)$ explicada na sección anterior, é dicir, $(t, y) \mapsto (t, y + c)$, $c \in \mathbb{R}$. En particular, o jacobiano do cambio de variables ha de mandar o xerador infinitesimal $\mathbf{v}_{(x,u)} = 2x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}$ no correspondente xerador infinitesimal da simetría estándar, que é $\mathbf{w}_{(t,y)} = \frac{\partial}{\partial y}$. É dicir:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial t}{\partial x} & \dfrac{\partial t}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{i.e.} \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2x\dfrac{\partial t}{\partial x} + u\dfrac{\partial t}{\partial u} = 0 \\ 2x\dfrac{\partial y}{\partial x} + u\dfrac{\partial y}{\partial u} = 1 \end{array} \right.$$

Obtemos así un sistema de ecuacións en derivadas parciais, pero atopar unha solución é a miúdo tarefa doada. No noso caso podemos pór

$$t(x, u) = x/u^2 \qquad \text{e} \qquad y(x, u) = \log |u| \, .$$

Nótese que a expresión para t ten relación coa simetría da EDO inicial (t é constante ó longo das órbitas da acción). Así, obtivemos o cambio de variables que buscabamos. Tan só temos que aplicar o cambio e a EDO orixinal queda transformada en

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1 - t}{1 - t + 2t^2},$$

que xa se pode resolver por integración directa.

Bibliografía

[1] Gilmore, R. (2008). *Lie groups, Physics and Geometry. An introduction for physicists, engineers and chemists*, Cambridge University Press.

[2] Olver, P. J. (1993). *Applications of Lie groups to differential equations*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics 107, Springer-Verlag New York, Inc.