USC Seminario de Iniciación á Investigación
Instituto de Matemáticas

Hipersuperficies isoparamétricas nas esferas

Miguel Domínguez Vázquez
Departamento de Xeometría e Topoloxía

28 de abril de 2010

Resumo

Presentamos aquí unha breve introdución a unha área da Xeometría Diferencial na que traballaron matemáticos ilustres como Tullio Levi-Civita, Beniamino Segre e Élie Cartan e que, hoxe en día, segue presentando problemas abertos de grande interese polas súas múltiples conexións con outras ramas da Matemática, como a Xeometría e a Topoloxía Alxebraicas e as EDPs. Falaremos das chamadas *hipersuperficies isoparamétricas*, en especial no espazo euclideano e nas esferas, expondo as liñas fundamentais da evolución histórica deste problema e explicando algúns conceptos e resultados relacionados importantes. Para unha introdución máis completa a este tema e ás súas xeneralizacións, pódese consultar [5], onde tamén se pode encontrar unha extensa bibliografía relacionada.

Un problema de Óptica

Consideremos unha onda $\phi(x, y, z, t)$ en $\mathbb{R}^3$. Verifícase entón a ecuación de ondas $\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$, onde Δ denota o Laplaciano respecto das coordenadas espaciais x, y, z. Para cada instante t_0 fixo podemos considerar o conxunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que teñen, nese momento, unha mesma fase $c = c(t_0)$ (i.e., o mesmo estado de vibración). A cada conxunto destes chámaselle *fronte de ondas*. Pensemos, pois, no conxunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(x, y, z, t_0) = c(t_0)\}$. Para estes puntos, supondo que a distribución en frontes de onda é independente do tempo, podemos escribir $\Delta\phi(x, y, z, t_0) = \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(x, y, z, t_0) = c''(t_0)$, co cal a función $\Delta f = \Delta\phi(\cdot, \cdot, \cdot, t_0)$, definida en $\mathbb{R}^3$, é constante nos conxuntos de nivel de $f = \phi(\cdot, \cdot, \cdot, t_0)$.

Por outra parte, unha lei clásica en Óptica é o *principio de Huygens*, que di que cada punto dunha fronte de ondas convértese en foco emisor dunha nova onda, e a suma de todas esas novas ondas dá lugar a outra fronte de ondas. Como, en $\mathbb{R}^3$, se un punto é foco emisor dunha onda, as frontes de onda xeradas son esferas centradas nese punto, o principio de Huygens tradúcese en que as frontes de onda son superficies equidistantes entre si. Dado que o gradiente dunha función real indica a dirección na que crece máis tal función e o seu módulo indica con que magnitude se dá ese crecemento, a condición de que os conxuntos de nivel de $f = \phi(\cdot, \cdot, \cdot, t_0)$ sexan equidistantes tradúcese en que $|\nabla f|$ é constante nos conxuntos de nivel de f.

Palabras Clave: Subvariedades, hipersuperficies isoparamétricas, curvaturas principais

Así pois, para cada instante fixado, as frontes de onda que estamos considerando veñen dadas por conxuntos de nivel dunha función f tal que Δf e $|\nabla f|$ son constantes neses conxuntos de nivel.

Hipersuperficies isoparamétricas

En xeral, nunha variedade de Riemann arbitraria $\bar{M}$ (podemos, para fixar ideas, pensar nun $\mathbb{R}^n$ ou nunha esfera S^n), unha función $f : \bar{M} \to \mathbb{R}$ tal que Δf e $|\nabla f|$ son constantes nos conxuntos de nivel de f chámase *función isoparamétrica*. Os conxuntos de nivel dunha función isoparamétrica que teñan codimensión 1 (i.e. que sexan hipersuperficies) denomínanse *hipersuperficies isoparamétricas*.

Aínda que o estudo e motivación destes conceptos probablemente se remonte incluso a datas anteriores, os primeiros documentos que tratan este tema sitúanse entre os anos 1918 e 1924. Nun deles, Somigliana deducía que unha superficie isoparamétrica en $\mathbb{R}^3$ ou é un plano, ou unha esfera ou un cilindro. Anos máis tarde, entre 1937 e 1940, este tema retómano, por unha parte, Levi-Civita, quen volve a probar o resultado de Somigliana, e B. Segre, quen o xeneraliza a $\mathbb{R}^n$, e, por outra parte, É. Cartan quen, como veremos, lle dá un impulso moi importante a esta teoría.

Para comprender os resultados de Cartan convén explicar primeiro uns cantos conceptos, que son xeneralización dos definidos na teoría de superficies en $\mathbb{R}^3$. Para recordar a teoría de superficies en $\mathbb{R}^3$ pódese consultar [3], mentres que para profundizar nas súas xeneralizacións pódese ver [1].

Sexa M unha hipersuperficie en $\mathbb{R}^n$, p un punto de M e v un vector tanxente a M en p. Pomos entón $v \in T_pM$. Denotemos por $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ o campo unitario normal a M (é único salvo orientación). Por $D_v\xi$ denotaremos o vector $(D_v\xi_1, \dots, D_v\xi_n) \in \mathbb{R}^n$, onde $D_v\xi_i$ denota a derivada direccional da función (coordenada) ξ_i na dirección de v. Como ξ é unitario compróbase facilmente que $\langle D_v\xi, \xi\rangle = 0$ (onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto escalar usual de $\mathbb{R}^n$). É dicir, $D_v\xi$ é un vector tanxente a M (en p). Podemos entón definir o chamado *operador de configuración* (tamén *operador de forma* ou *de Weingarten*), que é o seguinte endomorfismo do espazo vectorial T_pM:

$$S_p : v \in T_pM \longrightarrow Sv = -D_v\xi \in T_pM$$

Escollendo unha base de T_pM, podemos identificar S_p cunha matriz. Pódese probar que esta matriz é sempre simétrica, polo cal é diagonalizable nunha base ortonormal de T_pM. Ós autovalores de S_p chámaselles *curvaturas principais* (da hipersuperficie M no punto p). Á media das curvaturas principais chámaselle *curvatura media*.

Pois ben, un dos primeiros resultados de Cartan sobre o tema que nos ocupa di que, en calquera variedade de Riemann, unha hipersuperficie M é isoparamétrica se, e só se, ela e as súas hipersuperficies equidistantes teñen curvatura media constante (é dicir, independente do punto $p \in M$). No caso dos espazos de curvatura constante (os espazos euclideanos $\mathbb{R}^n$, as esferas S^n e os espazos hiperbólicos $\mathbb{R}H^n$) tense unha caracterización a maiores: M é isoparamétrica se, e só se, ten curvaturas principais constantes (é dicir, independentes do punto $p \in M$). Para estes espazos, Cartan probou unha fórmula que resulta útil para deducir información sobre as curvaturas principais constantes dunha hipersuperficie isoparamétrica M de $\mathbb{R}^n$, S^n ou $\mathbb{R}H^n$. Se as curvaturas principais constantes de M son $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ e a curvatura do espazo ambiente é c (recordemos, $c < 0$ para $\mathbb{R}H^n$, $c = 0$ para $\mathbb{R}^n$ e $c > 0$ para S^n) entón verifícase a *fórmula fundamental de Cartan*:

$$\sum_{i=1,\,\lambda_i \neq \lambda}^{n-1} \frac{c + \lambda\lambda_i}{\lambda - \lambda_i} = 0$$

para calquera curvatura principal $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\}$. Para $c \leq 0$ é doado deducir desta fórmula (razoando con desigualdades) que $g \leq 2$, onde g é o número de curvaturas principais distintas. Por exemplo, para o caso de $\mathbb{R}^n$, se hai unha soa curvatura principal λ, a hipersuperficie é unha esfera de raio $1/\lambda$, se $\lambda \neq 0$, ou un hiperplano, se $\lambda = 0$; se $g = 2$, da fórmula fundamental séguese que unha das curvaturas é cero e, entón, neste caso a hipersuperficie é un cilindro $S^k \times \mathbb{R}^{n-k-1}$. Por outra parte, grazas á fórmula anterior, Cartan puido clasificar as hipersuperficies isoparamétricas no espazo hiperbólico.

O problema nas esferas

Para o caso das esferas, a fórmula fundamental non aporta toda a información que a un lle gustaría. De feito, Cartan deuse conta de que o problema nas esferas era máis complicado e rico que en $\mathbb{R}^n$ ou en $\mathbb{R}H^n$. Primeiro clasificou as hipersuperficies isoparamétricas nas esferas S^n con unha ou dúas curvaturas principais: no primeiro caso obtéñense as interseccións de hiperplanos de $\mathbb{R}^{n+1}$ con S^n, e no segundo caso obtéñense as hipersuperficies do tipo $S^{n-k-1}(r) \times S^k(s)$, sendo $r^2 + s^2$ o cadrado do raio de S^n. Despois abordou o problema das 3 curvaturas principais, demostrando que as hipersuperficies nas esferas con 3 curvaturas principais constantes son tubos en torno a certos mergullos de planos proxectivos sobre as álxebras normadas $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ (os cuaternios) e $\mathbb{O}$ (os octonios). Un tubo en torno a unha subvariedade non é máis que o lugar xeométrico dos puntos do espazo ambiente que equidistan desa subvariedade.

Cartan atacou tamén a cuestión das 4 curvaturas principais, atopando dous exemplos, pero non foi capaz de lograr unha clasificación neste caso. O seu estudo das hipersuperficies isoparamétricas nas esferas conclúe coas tres preguntas seguintes

1. Existen hipersuperficies isoparamétricas para calquera número g de curvaturas principais?

2. Existen hipersuperficies isoparamétricas con $g \geq 4$ e distintas multiplicidades das curvaturas principais?

3. Son todas as hipersuperficies isoparamétricas homoxéneas?

Dise que unha subvariedade de S^n é homoxénea se é a órbita dun grupo de isometrías de S^n (recórdese que, entón, este grupo é subgrupo de $SO(n+1)$). Hai que notar que toda hipersuperficie homoxénea ten curvaturas principais constantes, pois os operadores de configuración dos distintos puntos son conxugados entre si, logo teñen os mesmos autovalores (curvaturas principais).

Durante varias décadas, a cuestión das hipersuperficies isoparamétricas permaneceu abandonada. Nos anos setenta, a raíz dun artículo de Hsiang e Lawson, Takagi e Takahashi clasificaron as hipersuperficies homoxéneas nas esferas, probaron que teñen 1, 2, 3, 4 ou 6 curvaturas principais e contestaron afirmativamente á segunda pregunta aberta de Cartan. Nos anos seguintes, Münzner retomou o problema das hipersuperficies isoparamétricas, avanzando considerablemente no seu estudo. Entre outras cousas, demostrou, usando métodos de cohomoloxía, que o número de curvaturas principais g dunha hipersuperficie isoparamétrica nunha esfera só pode ser 1, 2, 3, 4 ou 6, e que as súas multiplicidades verifican $m_i \equiv m_{i+2} \,(i \mod g)$. Probou tamén que a clasificación das hipersuperficies con g curvaturas principais redúcese a atopar polinomios f en $\mathbb{R}^{n+1}$ homoxéneos e de grao g tales que:

$$|\nabla f(x)|^2 = g^2 \, |x|^{2g-2} \, , \qquad \Delta f(x) = \frac{m_2 - m_1}{2} g^2 \, |x|^{g-2}$$

As imaxes recíprocas destes polinomios, intersecadas con S^n, dannos todas as posibles hipersuperficies isoparamétricas en S^n. Por tanto, o problema redúcese a unha cuestión puramente alxebraica, aínda que, en principio, moi complicada. Nótese que, considerando os coeficientes de f como incógnitas, a primeira ecuación danos un conxunto de hipercuádricas e, a segunda, un conxunto de hiperplanos; trataríase, pois, de atopar a subvariedade intersección. Anos máis tarde, Ferus, Karcher e Münzner atoparon unha familia de hipersuperficies isoparamétricas non homoxéneas nas esferas, respondendo negativamente á terceira pregunta de Cartan.

Xa nos últimos anos, Cecil, Chi e Jensen [2] e, independentemente, Immervoll [4], clasificaron, salvo para unhas cantas excepcións, as hipersuperficies isoparamétricas nas esferas con $g = 4$, probando que caen dentro dos exemplos homoxéneos e non homoxéneos coñecidos. Polo tanto, o caso $g = 4$, ó igual que o caso $g = 6$, segue aínda aberto hoxe en día.

Bibliografía

[1] J. Berndt, S. Console, C. Olmos, *Submanifolds and holonomy*, Chapman & Hall/CRC, 2003.

[2] T. Cecil, Q.-S. Chi, G. Jensen, *Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures*, Ann. of Math. (2) **166** (2007), 1–76.

[3] M. P. do Carmo; *Geometría Diferencial de curvas y superficies*, Alianza D. L., 1995.

[4] S. Immervoll, *On the classification of isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures in spheres*, Ann. of Math. (2) **168** (2008), 1011–1024.

[5] G. Thorbergsson, *A survey on isoparametric hypersurfaces and their generalizations*, Handbook of Differential Geometry, Vol. I (2000), 963–995.