

## O esqueleto dun grupo de Lie

Miguel Domínguez Vázquez

Departamento de Xeometría e Topoloxía

19 de outubro de 2011

Desde os seus inicios alá a mediados do s. XIX, os grupos de Lie téñense convertido nunha disciplina matemática de grande influencia dentro e fóra da Matemática Pura. A idea inicial do seu descubridor, o noruego Sophus Lie, era a de estender a teoría de Galois para ecuacións alxébricas ó eido das ecuacións diferenciais, co obxectivo de que as simetrías destas ecuacións, convenientemente formalizadas mediante a noción de grupo de Lie, puidesen axudar á súa resolución. Posteriormente, matemáticos de altura como Élie Cartan, Wilhelm Killing, Hermann Weyl ou Eugene Dynkin desenvolveron os fundamentos da fermosa teoría abstracta de grupos de Lie, mentres que, paralelamente, o campo de aplicacións desta teoría se ampliaba máis e máis: mecánica clásica e cuántica, xeometría de Riemann, análise numérica, relatividade, mecánica do continuo, etc.

Neste traballo presentamos unha rápida introdución a un dos múltiples aspectos dos grupos de Lie: a teoría de estrutura dos grupos compactos. O noso obxectivo será o de construír, para o caso particular do grupo  $SU(3)$ , dúas configuracións xeométricas que codifican a súa información fundamental: o seu sistema de raíces e, a partir deste, o seu esqueleto ou diagrama de Dynkin.

A bibliografía existente sobre grupos de Lie é enorme, polo cal aquí simplemente citamos un par de referencias. Unha introdución asequible e co enfoque dirixido ó estudo de ecuacións diferenciais é [3]. Unha exposición bastante completa sobre grupos matriciais pódese atopar en [1]. Unha referencia máis avanzada é [2], onde se pode atopar unha introdución á teoría dos sistemas de raíces (Capítulo II).

### Grupos de Lie, grupos de matrices e álxebras de Lie

Un *grupo de Lie* é un grupo (i.e. un conxunto cunha operación asociativa, con elemento neutro e inversos) que é á súa vez unha variedade diferenciable (recórdese que as variedades son xeneralizacións a dimensión superior das curvas e das superficies), e tal que a operación de grupo e a inversión son aplicacións diferenciables. Os principais exemplos de grupos de Lie son os *grupos de matrices*, é dicir, subgrupos do grupo  $GL(n, \mathbb{K})$  das matrices  $n \times n$  invertibles con coeficientes no corpo  $\mathbb{K}$  dos reais  $\mathbb{R}$ , dos complexos  $\mathbb{C}$  ou dos cuaternios  $\mathbb{H}$ . No caso dos grupos de matrices, a operación é a multiplicación de matrices, o elemento neutro é a matriz identidade, e a inversión é a inversión usual de matrices.

---

PALABRAS CLAVE: Grupo de Lie, álgebra de Lie, sistema de raíces, diagrama de Dynkin

Asociado a todo grupo de Lie  $G$  existe un obxecto que contén a súa información máis relevante dun xeito máis manexable: a súa *álgebra de Lie*  $\mathfrak{g}$ . Esta defínese coma o espazo tanxente ó grupo no elemento neutro,  $T_1G$ , xunto cunha certa operación interna anticonmutativa e bilineal denominada *corchete de Lie*  $[\cdot, \cdot]$ . En particular toda álgebra de Lie é un espazo vectorial. Se  $G \subset GL(n, \mathbb{K})$  é matricial,  $\mathfrak{g}$  consiste nas derivadas  $A'(0) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  de todas as curvas  $A: t \mapsto A(t) \in G$  tales que  $A(0) = I$ . Equivalentemente, trátase de todas as matrices de  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  tales que sumadas á identidade  $I$  dá un elemento de  $G$  ata orde 1. O corchete de Lie de dous elementos  $X, Y$  da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  dun grupo matricial é simplemente o conmutador de ambas matrices,  $[X, Y] = XY - YX$ .

Por exemplo, o grupo especial unitario  $G = SU(n)$  das matrices complexas unitarias con determinante 1 é un subgrupo de  $GL(n, \mathbb{C})$ . En efecto, se  $A, B \in G$ , por definición  $A^*A = I$  e  $B^*B = I$ , co cal  $(AB)^*(AB) = I$  e  $(A^{-1})^*A^{-1} = (AA^*)^{-1} = I$ ; e como  $\det A = \det B = 1$ , tamén  $\det AB = 1$  e  $\det A^{-1} = 1$ . Calculemos a súa álgebra de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$ . Sexa  $A: t \mapsto A(t) \in G$  tal que  $A(0) = I$ . Entón  $A(t)^*A(t) = I$  e, derivando,  $A'(t)^*A(t) + A(t)^*A'(t) = 0$ ; avaliando en 0 obtemos  $A'(0)^* + A'(0) = 0$ , i.e.  $A'(0)$  é unha matriz antihermitiana. Por outra parte, como  $\det A(t) = 1$ , derivando en 0 temos que  $\text{tr} A'(0) = 0$  (a diferencial da función determinante é a función traza). Así dedúcese que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) : X^* + X = 0, \text{tr} X = 0\}.$$

Obsérvese que o corchete de Lie de dúas matrices de  $\mathfrak{g}$  dá unha matriz de  $\mathfrak{g}$ .

Existen diversas clases de grupos de Lie. Os máis sinxelos son os abelianos. Outros grupos xa máis ricos en estrutura son os grupos compactos. Un grupo matricial  $G \subset GL(n, \mathbb{K})$  dise compacto se é pechado e acotado no espazo euclideano  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n^2}$ . Estes grupos están clasificados e o seu estudo baséase na construción do seu sistema de raíces. Na seguinte sección faremos este estudo para o caso particular do grupo compacto  $SU(3)$ .

## O grupo $SU(3)$ . Cálculo do sistema de raíces e diagrama de Dynkin

Propómonos agora construír o sistema de raíces e o diagrama de Dynkin de  $G = SU(3)$ . Para iso, traballaremos exclusivamente a nivel de álgebras de Lie. Polo tanto, todo o que faremos encadrarase no marco da Álgebra Lineal.

Como xa vimos, a álgebra de Lie de  $G$  é o seguinte subespazo vectorial real de  $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ , con dimensión real 8:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} ia_1 & z_{12} & z_{13} \\ -\bar{z}_{12} & ia_2 & z_{23} \\ -\bar{z}_{13} & -\bar{z}_{23} & ia_3 \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{R}, z_{ij} \in \mathbb{C}, a_1 + a_2 + a_3 = 0 \right\}.$$

Dado que falaremos de autoespazos e autovalores de certas aplicacións lineais definidas sobre  $\mathfrak{g}$ , convirá complexificar este espazo vectorial real, pois por exemplo, pode haber autovalores non reais. É doado comprobar que esta complexificación é:

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g} + i\mathfrak{g} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{C}) : \text{tr} X = 0\} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}),$$

que coincide coa álgebra de Lie do grupo lineal especial complexo  $SL(3, \mathbb{C})$  (conformado polas matrices con determinante un). Nótese que  $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = 8$ .

Definimos o seguinte subespazo vectorial de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ :

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix} : h_i \in \mathbb{C}, h_1 + h_2 + h_3 = 0 \right\}.$$

Compróbase facilmente que  $\mathfrak{h}$  é unha subálgebra abeliana de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  (i.e.,  $[X, Y] = XY - YX = 0$  para todo  $X, Y \in \mathfrak{h}$ ). Pódese probar tamén que non existe unha subálgebra abeliana de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  de dimensión maior ca  $\dim \mathfrak{h} = 2$ . Dise entón que  $\mathfrak{h}$  é unha subálgebra abeliana maximal ou *subálgebra de Cartan* de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ .

Agora, para cada  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , definimos a matriz  $E_{ij}$  como aquela que ten todas as entradas nulas, excepto na posición  $(i, j)$ , na que ten un 1. Para cada  $H \in \mathfrak{h}$ , consideramos a aplicación lineal  $\text{ad}(H): \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  definida por  $\text{ad}(H)(X) = [H, X]$  (esta aplicación denomínase *aplicación adxunta*). Se  $H \in \mathfrak{h}$  é a matriz diagonal con entradas  $h_1, h_2, h_3$ , entón para cada  $i \neq j$  temos que:

$$\text{ad}(H)E_{ij} = [H, E_{ij}] = HE_{ij} - E_{ij}H = h_i E_{ij} - h_j E_{ij} = \alpha_{ij}(H)E_{ij},$$

onde  $\alpha_{ij}: \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$  é o covector (ou forma lineal) definido por  $\alpha_{ij}(H) = h_i - h_j$ . Así pois,  $E_{ij}$  é un autovector de  $\text{ad}(H)$  con autovalor  $\alpha_{ij}(H)$ . Nótese que  $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$ . Como as matrices  $E_{ij}$  con  $i \neq j$  xeran (sobre  $\mathbb{C}$ ) un espazo complementario a  $\mathfrak{h}$  en  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ , deducimos que:

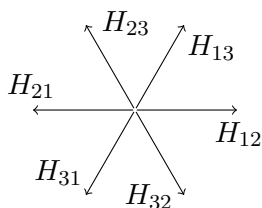
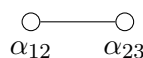
$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_{12}} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_{13}} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_{23}} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_{12}} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_{13}} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_{23}},$$

onde  $\mathfrak{g}_{\pm\alpha_{ij}}$  é o autoespazo simultáneo para todas as aplicacións lineais  $\text{ad}(H)$  con  $H \in \mathfrak{h}$  correspondente ó autovalor  $\pm\alpha_{ij}(H)$ . Como vimos,  $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} = \mathbb{C}E_{ij}$  se  $i < j$  e  $\mathfrak{g}_{-\alpha_{ij}} = \mathbb{C}E_{ji}$  se  $i > j$ . A descomposición anterior de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  denomínase a *descomposición en espazos de raíces* do grupo de Lie  $G = SU(n)$  (ou da álgebra de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$ , ou da álgebra de Lie complexa  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ ), mentres que os covectores ou autovalores simultáneos  $\pm\alpha_{ij}$  chámanse *raíces*. Esta descomposición simplifica o estudo do corchete de Lie de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ , pois verifícase que  $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ , para calquera par de raíces  $\alpha$  e  $\beta$ , onde asumimos que  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ , e  $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = 0$  se  $\alpha + \beta$  non é raíz.

En  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  podemos definir unha aplicación bilinear  $B$  con valores en  $\mathbb{C}$  mediante  $B(X, Y) = \text{tr } XY$ . Esta é a denominada *forma de Killing* de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  que, en xeral para calquera álgebra de Lie, se define como  $B(X, Y) = \text{tr } [X, [Y, \cdot]]$ . Ademais,  $-B|_{\mathfrak{g}}$  é un produto interior definido positivo en  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(3)$ . Non obstante, nós só precisaremos a restrición de  $B$  a  $\mathfrak{h}$ , que claramente vén dada mediante  $B(H, H') = h_1 h'_1 + h_2 h'_2 + h_3 h'_3 \in \mathbb{C}$ , polo cal é unha forma bilinear non dexenerada.

Así pois, para cada raíz  $\alpha_{ij} \in \mathfrak{h}^*$  podemos definir unha matriz  $H_{ij} \in \mathfrak{h}$  mediante a relación:  $B(H, H_{ij}) = \alpha_{ij}(H)$  para todo  $H \in \mathfrak{h}$ . A estas matrices  $H_{ij}$  denomínaselles *corraíces*. Unha sinxela conta indica que  $H_{ij} = E_{ii} - E_{jj}$ . Así obtemos 6 corraíces:  $H_{12}, H_{21}, H_{13}, H_{31}, H_{23}, H_{32}$ , que son opostas dúas a dúas. Como

ademais son matrices reais, podémolas ver coma 6 vectores no espazo euclideo 2-dimensional  $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{h} \cap \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ , dotado do produto escalar  $B|_{\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}}$ . Podemos debuxar entón estes 6 vectores no plano euclideo. Como  $B(H_{ij}, H_{kl}) \in \{\pm 1\}$  se  $H_{ij}$  e  $H_{kl}$  non son colineais, e  $B(H_{ij}, H_{ij}) = 2$ , deducimos que o ángulo entre calquera dous destes seis vectores é un múltiplo de 60 graos, e tamén que os seis vectores teñen a mesma lonxitude. Obtense polo tanto a configuración xeométrica da figura de abaixo á esquerda, coñecida como *sistema de raíces* de tipo  $A_2$  (en xeral,  $A_n$  denota o sistema de raíces de  $SU(n+1)$ , e  $n$  é a dimensión da subálgebra de Cartan).

Sistema de raíces de  $SU(3)$ Diagrama de Dynkin de  $SU(3)$ 

A información contida no sistema de raíces pódese concentrar aínda máis. Para iso, debemos fixar un *conxunto de raíces simples*, que consiste nun subconxunto de raíces tal que toda corraíz se pode expresar como combinación lineal das corraíces correspondentes ás raíces simples, con todos os coeficientes enteiros e todos do mesmo signo. No noso caso, compróbase que  $\{\alpha_{12}, \alpha_{23}\}$  é un conxunto de raíces simples xa que toda matriz  $H_{ij}$  se pode escribir como combinación lineal de  $\{H_{12}, H_{23}\}$  con coeficientes enteiros e todos do mesmo signo. Agora asociámoslle a cada raíz simple un vértice (ou nodo) dun grafo, e conectamos ditos vértices mediante liñas, do seguinte xeito. Se as corraíces correspondentes a dous nodos son vectores perpendiculares, entón tales nodos non se unen mediante ningunha liña; se o ángulo entre dúas corraíces é de 120 graos, os nodos únense cunha soa liña; se o ángulo é de 135 graos, únense mediante 2 liñas; e se o ángulo é de 150 graos, mediante 3 liñas. Pódese demostrar que, para calquera sistema de raíces, non hai ningunha posibilidade distinta das anteriores. Mediante este procedemento obtense o *diagrama de Dynkin* dun grupo de Lie compacto.

No noso exemplo as corraíces simples  $H_{12}$  e  $H_{23}$  forman un ángulo de 120 graos, co cal o diagrama de Dynkin de  $SU(3)$  é o que se amosa na figura de arriba á dereita.

## Bibliografía

- [1] A. Baker; *Matrix groups. An introduction to Lie group theory*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag London, Ltd., 2002.
- [2] A. W. Knap; *Lie groups beyond an introduction*, Second edition. Progress in Mathematics, **140**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.
- [3] P. J. Olver; *Applications of Lie groups to differential equations*, Second edition, Graduate texts in mathematics, **107**, Springer-Verlag New York, Inc., 1993.