Seminario de Iniciación á Investigación
Instituto de Matemáticas

O mundo hiperbólico de Poincaré

Miguel Domínguez Vázquez
Departamento de Xeometría e Topoloxía

22 de abril de 2009

Resumo

Ata ben entrado o século XIX, cando se falaba de xeometría era claro a que xeometría se estaba un refirindo: a dos *Elementos* de Euclides. Non se concebía outra posibilidade. Non obstante, o s. XIX trouxo consigo o desenvolvemento de xeometrías alternativas, principalmente a proxectiva e a hiperbólica, así como a busca dalgunha teoría xeral na que estas xeometrías tivesen cabida como casos particulares (basicamente refirímonos á xeometría de Riemann e ó programa Erlangen de Klein).

Tanto xeometría proxectiva como hiperbólica incumpren o famoso quinto postulado de Euclides, que se pode formular do seguinte xeito: *no plano, dada unha recta e un punto exterior a ela, existe unha única recta que pasa por tal punto e que non corta á recta dada.* Pero foi a xeometría hiperbólica a que, historicamente, xurdiu do intento de varios matemáticos (Saccheri, Lambert...) por probar que o quinto postulado era consecuencia dos demais axiomas que Euclides asumía. Porén, foilles imposible probar tal cousa: o quinto postulado era independente dos demais. A esta conclusión chegaron no s. XIX Gauss, Bolyai e Lobachevsky de xeito independente, cando viron que era factible a construción dunha xeometría distinta, na cal para unha "recta" dada e un punto exterior a ela, existen infinitas "rectas" que pasan polo punto e non cortan á recta dada. Esta xeometría é a hiperbólica. Anos máis tarde, Beltrami proporía varios modelos para a xeometría hiperbólica, entre os que se atopan o modelo do disco de Poincaré, o do semiplano e o de Cayley-Klein.

Henri Poincaré fixo un uso importante desta xeometría, e a el se lle debe unha descrición do modelo do disco baseada en fenómenos físicos ([5]): o mundo non euclideano, como el lle chamaba. Aquí tratamos de seguir os seus pasos e describir como é ese mundo que Poincaré imaxinou. Para iso presentamos a seguir dous mundos hiperbólicos imaxinarios ([2]).

O mundo hiperbólico de Poincaré I

Consideremos un mundo plano situado no semiplano de $\mathbb{R}^2$ dado por $y > 0$. Supoñamos que ese mundo está conformado por un medio opticamente heteroxéneo

Palabras Clave: Xeometría hiperbólica, xeometría non euclideana, disco de Poincaré, modelo do semiplano

de xeito que a velocidade da luz (desde o noso punto de vista externo a ese mundo) depende do punto (x, y) polo que pase o raio de luz, seguindo a función $c(x, y) = y$ (para evitar contradicir a finitude da velocidade da luz podemos restrinxirnos a un aberto adecuado do semiplano). Pretendemos determinar as traxectorias dos raios de luz neste mundo. Para iso, faremos uso da lei da refracción de Snell, que di que se temos dous medios separados por un plano, de xeito que a velocidade da luz no primeiro deles é c_1 e no segundo c_2, e un raio de luz pasa do primeiro ó segundo, ese raio sufrirá unha desviación da dirección dacordo coa lei $c_1 \operatorname{sen}\beta = c_2 \operatorname{sen}\alpha$, sendo α e β os ángulos que forma o raio de luz coa perpendicular ó plano no primeiro medio e no segundo medio, respectivamente. Denotando por $\alpha(y)$ o ángulo que forma coa vertical a recta tanxente á traxectoria dun raio de luz, podemos deducir a relación $\operatorname{sen}\alpha(y) = Ky$, para certa constante K. Usando isto e supondo que podemos describir localmente esas traxectorias mediante funcións g da ordenada, chegamos a que, ou ben $K = 0$, ou ben se cumpre a ecuación

$$(g(y) - K')^2 + y^2 = \frac{1}{K^2}$$

sendo K' outra constante. Por tanto, as traxectorias dos raios de luz son ou ben rectas verticais, ou ben semicircunferencias contidas completamente no semiplano $y > 0$ e con centro no eixo de abscisas. A estas curvas chamarémoslles xeodésicas, e representarán as liñas rectas para os habitantes deste mundo imaxinario (as liñas que minimizarán a distancia hiperbólica).

Por outra banda, eses habitantes poderían pensar en tomar como unidade de lonxitude a distancia que recorre a luz no tempo que, para nós, tarda a luz en recorrer un metro no baleiro (a esa unidade de tempo chamarémoslle metro-luz, e é aproximadamente igual a $1/(3{\cdot}10^8)$ segundos). Chamémoslle entón metro hiperbólico (mh) á lonxitude que recorre a luz nun metro-luz dentro do mundo hiperbólico. Entón, para eles, a distancia entre dous puntos medida en mh vén dada polo tempo que tarda a luz en chegar dun punto a outro, medindo ese tempo en metros-luz. Por tanto, nesas unidades, para eles, a velocidade da luz será constante igual a 1. Se asumimos para o noso mundo a mesma unidade de tempo (o metro-luz), dedúcese a seguinte relación entre as lonxitudes hiperbólica e euclideana de dous vectores tanxentes nun punto (x, y):

$$\text{Lonxitude hiperbólica} = \frac{\text{Lonxitude euclideana}}{y}$$

O mundo hiperbólico de Poincaré II

Pensemos agora noutro mundo plano algo distinto: o disco unidade centrado na orixe no plano complexo. Supoñamos que a temperatura nese mundo é heteroxénea, dacordo coa lei $T = 1 - |z|^2$, para cada punto z do disco. Supoñamos tamén que os corpos nese mundo se poñen de inmediato en equilibrio térmico co entorno que os rodea, e que sofre dilatacións e contraccións segundo pasan a sitios máis quentes ou máis fríos, respectivamente. En concreto, suporemos que a lonxitude dun obxecto será proporcional á temperatura do punto no que se atope.

Podemos imaxinar que os habitantes deste mundo toman como unidade de lonxitude (que chamarán metro hiperbólico -mh-) a lonxitude dunha barra ríxida situada no centro do disco e que, para nós, mide xusto un metro. Se esa barra se levase por distintos puntos do disco, a nós pareceríanos que se contrae e se dilata dependendo do cerca ou do lonxe que se atope do centro do disco (dacordo co que diximos antes), pero para os seres deste mundo imaxinario esa barra mediría sempre o mesmo: 1 mh. Debido a todo isto, chegamos á seguinte fórmula para as lonxitudes de vectores tanxentes nun punto z:

$$\text{Lonxitude hiperbólica} = \frac{\text{Lonxitude euclideana}}{1 - |z|^2}$$

Os dous mundos son isométricos

Pois ben, se os seres destes dous mundos imaxinarios se puxeran en contacto, resulta que se porían dacordo na forma de medir. Isto é así porque existe unha isometría (salvo un factor constante) entre o modelo do disco e o do semiplano (i.e., un difeomorfismo que preserva lonxitudes de curvas -ou de vectores tanxentes-). Unha tal isometría é a dada por:

$$f(z) = \frac{-iz + 1}{z - i}$$

para cada z do disco unidade. Esta f é unha transformación de Möbius, polo cal manda rectas e circunferencias en rectas e circunferencias, e ademais preservando ángulos (é conforme). Isto implica que as imaxes recíprocas das xeodésicas do semiplano son cachos de circunferencias que cortan ortogonalmente ó borde do disco, ou diámetros do mesmo. Como f é unha isometría, manda xeodésicas en xeodésicas (resultado de xeometría de Riemann), polo que xa coñecemos entón tamén como son as xeodésicas do mundo do disco de Poincaré.

Algunhas propiedades

Salientamos agora algunhas propiedades chamativas da xeometría hiperbólica.

Proposición 1. *O espazo hiperbólico é conformemente chan (os ángulos son os mesmos que no espazo euclideano).*

Proposición 2. *A suma dos ángulos dun triángulo hiperbólico é inferior a* π.

Proposición 3. *A área dun triángulo con ángulos* α, β *e* γ *é* $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$.

Proposición 4. *Se dous triángulos hiperbólicos teñen os ángulos respectivos iguais, entón son congruentes.*

Proposición 5. *As transformacións de Möbius que preservan o disco unidade son as isometrías do disco de Poincaré que preservan a orientación.*

Xeneralización

A xeometría hiperbólica plana que vimos considerando pódese xeralizar de diversas maneiras. A máis evidente é aumentando a dimensión. Para iso pódense considerar modelos análogos ó do disco ou ó do semiplano en dimensións superiores, pasando a considerar bolas ou semiespazos (ver [3] por exemplo). Outra forma é a través do modelo do hiperboloide de Minkowski (ver [3] ou [4]), que consiste en considerar no espazo vectorial $\mathbb{R}^{n+1}$ a métrica de Lorentz $Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}$ e o hiperboloide de dúas follas $Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -1$. A folla superior dese hiperboloide dotada da métrica inducida é isométrica ó espazo hiperbólico de dimensión n.

Outro tipo de xeneralizacións posibles virían de considerar espazos hiperbólicos complexos, cuaterniónicos..., de considerar as chamadas variedades hiperbólicas (que veñen a ser cocientes de espazos hiperbólicos por grupos discretos de isometrías), ou de considerar variedades de Riemann con curvatura negativa non necesariamente constante (posto que o espazo hiperbólico ten curvatura constante negativa).

Interese desta xeometría

Por último, damos algunha idea de por qué é importante o estudo desta xeometría:

- As únicas xeometrías homoxéneas (i.e., a xeometría é a mesma con independencia do punto do espazo) e isotrópicas (i.e., a xeometría é a mesma con independencia da dirección) son a euclideana, a esférica e a hiperbólica. Estas forman un grupo 1-paramétrico de espazos: o parámetro é a curvatura.
- Os físicos discuten se, a grande escala, o Universo é euclideano, elíptico ou hiperbólico, aínda que recentemente inclínanse por esta última opción.
- Ten un papel importante na Teoría da Relatividade Especial: o espazo hiperbólico de dimensión 3 representa o espazo de velocidades posibles dos obxectos con masa (véxase [4]).

Bibliografía

[1] É. Ghys, *Poincaré et son disque*, (2005).

[2] S. Gindikin; *Tales of mathematicians and physicists*, Springer, 2007.

[3] J. M. Lee; *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, Springer, 1997.

[4] R. Penrose; *The road to reality. A complete guide to the laws of the Universe*, Jonathan Cape, 2004.

[5] H. Poincaré, *L'espace et la géométrie*, Revue de métaphysique et de morale **3** (1985), 631-46.

[6] Wikipedia, *http://www.wikipedia.org*