Minicurso

Teoría de Morse discreta

El objetivo de este curso es dar una visión general de la teoría de Morse discreta, introducida por R. Forman en 1998. Para ello, se introducirán las nociones y resultados fundamentales, haciendo hincapié en las relaciones existentes entre las singularidades (elementos críticos) de una función de Morse discreta y la topología de los objetos (triangulaciones de variedades o, más generalmente, complejos simpliciales) sobre los que está definida.

Al igual que ocurre en la teoría de Morse clásica, es de especial interés determinar las funciones con el menor número posible de elementos críticos, problema que está íntimamente ligado a la homología y homotopía de la triangulación considerada. Por otra parte, teniendo en cuenta la naturaleza combinatoria de la teoría de Morse discreta, ésta puede ser interpretada desde el punto de vista de la teoría de grafos en términos de emparejamientos en los llamados diagramas de Hasse del complejo considerado. Finalmente, se indicarán algunos resultados dentro de las líneas de investigación en las que ha trabajado y/o está trabajando nuestro grupo.

Contenido

1 Introducción

Teoría de Morse clásica

- **M. Morse**, *The Calculus of Variations in the Large*, Colloquium Publications 18, Amer. Math. Soc., Providence R. I., 1934.
- **J. Milnor** *Morse Theory*, Annals of Mathematics Studies 51, University Press, New Jersey, 1963.
- **L.I. Nicolaescu**, *An invitation to Morse Theory*, Universitext, New York, 2007.

Teoría de Morse discreta

- **R. Forman**, Morse Theory for cell complexes, *Adv. Math.* **134** (1) (1998), 90-145.
- **R. Forman**, A user's guide to discrete Morse theory, *Séminaire Lotharingien de Combinatoire* **48** (2002), Article B48c.
- **K.P. Knudson**, *Morse Theory: Smooth and Discrete*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, New Jersey, 2015.

¿Qué es la teoría de Morse discreta (TMD)?
Una teoría/herramienta combinatoria que estudia propiedades de objetos discretos (complejos simpliciales).

¿Cuáles son sus principales resultados?
Relacionar la topología de objetos discretos con propiedades de funciones discretas definidas sobre ellos.

¿Cuáles son sus ventajas respecto a la teoría clásica?

- Por su naturaleza discreta, resulta más natural para ser implementada. Además, ello permite estudiarla desde distintos puntos de vista: teoría de grafos, posets, enfoque algebraico,...
- A diferencia del enfoque clásico, la TMD se aplica sobre objetos más generales que las variedades.
- Las pruebas de versiones discretas de muchos resultados clásicos son más directas y menos técnicas.

¿Cuáles son sus aplicaciones?

- Visualización (Trabajos de Thomas Lewiner y Neza Mramor-Kosta).
- Topología Computacional (Trabajos de Pedro Real).
- Compresión de imágenes digitales (Trabajos de Rocío González-Díaz).
- Análisis topológico de datos (Trabajos de Ulrich Bauer).
- Tipo de homotopía de complejos asociados a grafos (Trabajos de Jakob Jonnson, Dimitry Kozlov y John Shareshian).
- Álgebra conmutativa (Trabajos de Wolkmar Welker y Michael Jollenbeck).
- Sistemas dinámicos (Trabajos de Marian Mrozek).

2 Nociones y resultados básicos en Teoría de Morse discreta

Definición 1 *Un* *n-símplice* *es la envolvente convexa de $n+1$ puntos de $\mathbb{R}^n$ en posición general.*

Definición 2 *Un* *complejo simplicial* *K es una familia (finita) de símplices verificando:*

1. *Si $\tau \in K$ y $\sigma < \tau$, entonces $\sigma \in K$.*
2. *Dados $\tau, \tau' \in K$ tales que $\tau \cap \tau' \neq \emptyset$, entonces $\tau \cap \tau' \in K$.*

Definición 3 *Una* *función de Morse discreta* *definida sobre un complejo simplicial K es una función $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo p-símplice $\sigma \in K$ verifica:*

1. $card\{\tau^{(p+1)} > \sigma / f(\tau) \leq f(\sigma)\} \leq 1$.
2. $card\{\upsilon^{(p-1)} < \sigma / f(\upsilon) \geq f(\sigma)\} \leq 1$.

Definición 4 *Se dice que un p-símplice $\sigma \in K$ es* *crítico con respecto a f* *si:*

1. $card\{\tau^{(p+1)} > \sigma / f(\tau) \leq f(\sigma)\} = 0$.
2. $card\{\upsilon^{(p-1)} < \sigma / f(\upsilon) \geq f(\sigma)\} = 0$.

Si σ es un símplice crítico, se dice que $f(\sigma)$ es un *valor crítico* .

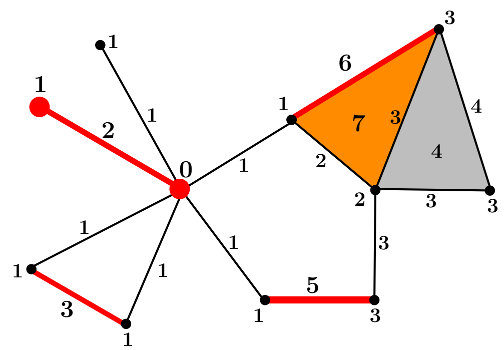


Figura 1: Función de Morse discreta definida sobre un 2-complejo simplicial.

Definición 5 *Un* **campo vectorial discreto** V *en un complejo* K *es un conjunto de pares* $\{\alpha^{(p)}, \beta^{(p+1)}\}$ *de símplices de* K *tales que:*

- $|dim(\alpha) - dim(\beta)| = 1$.
- $\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}$.
- *Todo símplice de* K *está, a lo más, en un único par.*

Definición 6 *Dado un campo vectorial discreto* V *en* K*, un* **V-camino** *es una sucesión de símplices*

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \ldots, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)}$$

tales que para todo $i \geq 0$ *se verifica:*

- $(\alpha_i^{(p)}, \beta_i^{(p+1)}) \in V$.
- $\beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)} \neq \alpha_i^{(p)}$.

Se dirá que un V*-camino es* **cerrado** *si* $\alpha_0^{(p)} = \alpha_{r+1}^{(p)}$.

Definición 7 *Dada una función de Morse discreta definida en* K*, se dice que un par de símplices* $(\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)})$ *está en el* **campo vectorial gradiente inducido por f** *si* $f(\alpha) \geq f(\beta)$.

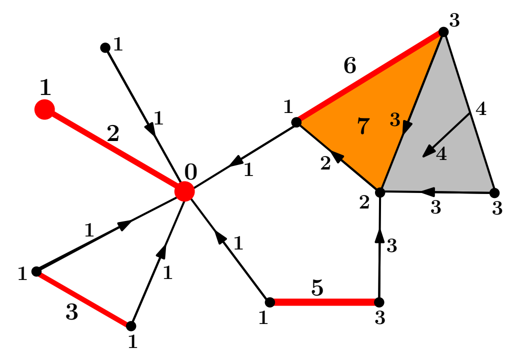


Figura 2: Campo vectorial gradiente inducido por una función de Morse discreta.

Teorema 8 *Sea V el campo gradiente inducido por una función de Morse discreta definida en un complejo K. Una sucesión de símplices*

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \ldots, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)}$$

es un V-camino si y solo si

$$f(\alpha_0^{(p)}) \geq f(\beta_0^{(p+1)}) > \cdots \geq f(\beta_r^{(p+1)}) > f(\alpha_{r+1}^{(p)}) .$$

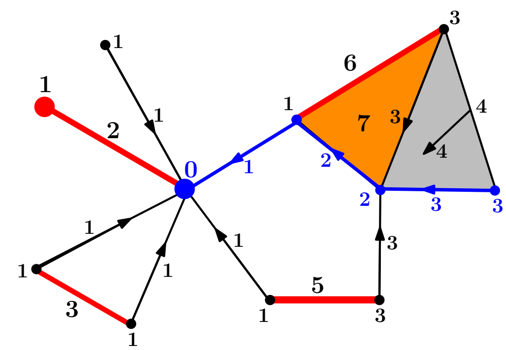


Figura 3: Un V-camino con $p = 0$.

Teorema 9 *Un campo vectorial discreto V es el campo gradiente inducido por una función de Morse discreta si y solo si no existen V-caminos cerrados.*

Definición 10

- *Sea K un complejo simplicial. Se dice que $\sigma \in K$ es una* **cara libre** *de K si σ es cara de un único símplice de τ de K.*
- *A la eliminación del par (σ, τ) en K se la denomina* **colapso elemental** .

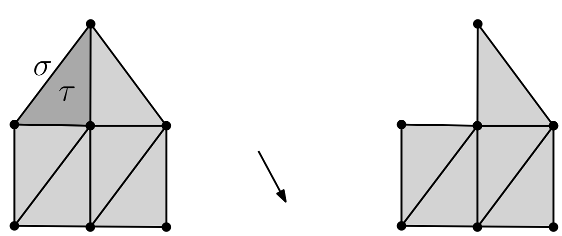


Figura 4: Colapso elemental.

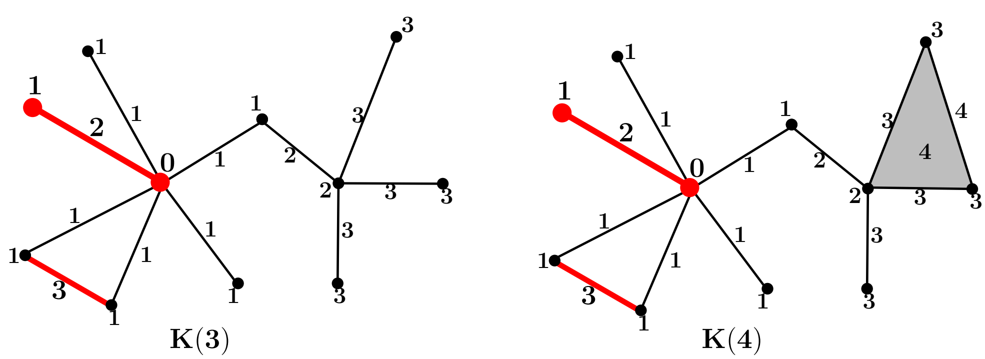
Definición 11

- *Un complejo se llama* ***colapsable*** *si puede reducirse a un vértice tras un número finito de colapsos elementales.*
- *Al proceso inverso a un colapso elemental se le llama* ***expansión elemental*** *.*
- *Una sucesión finita de colapsos (resp. expansiones) elementales se denomina* ***colapso (resp. expansión) generalizado*** *.*
- *Si un complejo puede obtenerse a partir de otro mediante colapsos y expansiones se dirá que ambos son del mismo* ***tipo de homotopía simple*** *.*

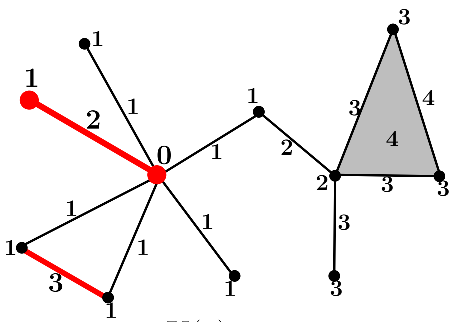
Definición 12 *Sea f una función de Morse discreta definida sobre un complejo K, dado $c \in \mathbb{R}$ se define el* ***subcomplejo de nivel $K(c)$*** *como:*

$$K(c) = \bigcup_{f(\alpha)\leq c} \bigcup_{\beta \leq \alpha} \beta\,.$$

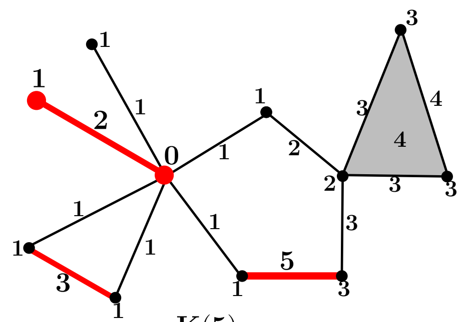
Teorema 13 *Si el intervalo $(a, b]$ no contiene valores críticos, se tiene que los subcomplejos de nivel $K(a)$ y $K(b)$ son del mismo tipo de homotopía simple. En realidad, $K(b)$ colapsa a $K(a)$.*



Teorema 14 *Si el intervalo $(a, b]$ contiene un único valor crítico $f(\alpha)$, se tiene que el subcomplejo de nivel $K(b)$ es homotópicamente equivalente al CW-complejo $K(a) \cup_F B^p$, donde F es una aplicación de pegamiento que identifica $\mathbb{S}^{p-1}$ con el borde del p-símplice crítico α.*



$\mathbf{K(4)}$



$\mathbf{K(5)}$

Teorema 15 *Sea f una función de Morse discreta definida sobre un complejo simplicial K. Se tiene que K es homotópicamente equivalente a un CW-complejo con una célula de dimensión p por cada p-símplice crítico de f en K.*

Teorema 16 *[Desigualdades débiles de Morse] Dada una función de Morse discreta f definida sobre un complejo K, denotamos por $m_p(f)$ al número de p-símplices críticos de f, por b_p al p-ésimo número de Betti de K y por $\chi(K)$ a la característica de Euler de K. Se tiene que:*

- $m_p(f) \geq b_p$,
- $m_0(f) - m_1(f) + \cdots + (-1)^n m_n(f) = b_0 - b_1 + \cdots + (-1)^n b_n = \chi(K)$.

Teorema 17 *[Desigualdades fuertes de Morse] Bajo las hipótesis anteriores se tiene para todo $p = 0, 1, \ldots, n$:*

- $m_p(f) - m_{p-1}(f) + \cdots \pm m_0 \geq b_p - b_{p-1} + \cdots \pm b_0$

Definición 18 *La característica de Morse-Smale de un complejo K se define como*

$$\gamma(K) = min\{\sum_{p=0}^{n} m_p(g) : g \in DMF(K)\}$$

donde $DMF(K)$ es el conjunto de las funciones de Morse discretas definidas sobre K.

Definición 19 *Se dirá que una función de Morse discreta $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ es **óptima** si el número de símplices críticos de f es mínimo, es decir,*

$$\sum_{p=0}^{n} m_p(f) = \gamma(K)\,.$$

Definición 20 *Se dirá que una función de Morse discreta $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ es **$\mathbb{F}$-perfecta** si $m_i(f) = b_i(K;\mathbb{F})$ para todo $i = 0, \ldots, dim(K)$*

Teorema 21 *Toda función de Morse discreta $\mathbb{F}$-perfecta es óptima, pero el recíproco NO es cierto.*

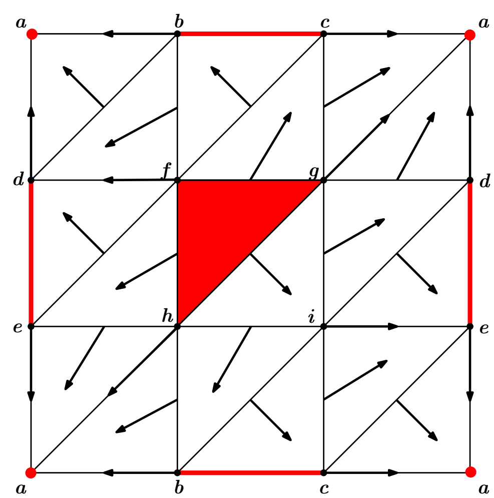


Figura 5: Campo vectorial gradiente inducido por una función de Morse discreta $\mathbb{Z}$-perfecta en el toro.

Teorema 22 *Un complejo K es colapsable si y solo si $\gamma(K) = 1$, es decir, K admite una función de Morse discreta con un único símplice crítico.*

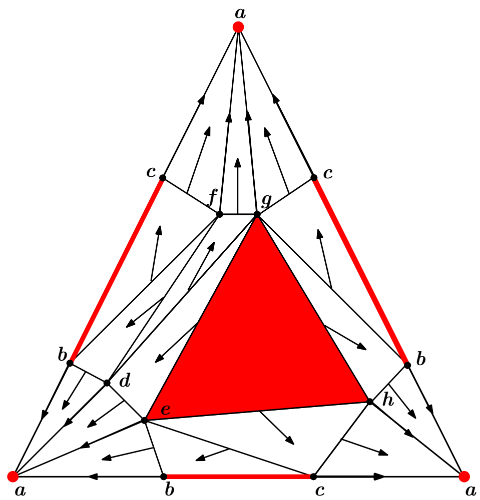


Figura 6: Campo vectorial gradiente inducido por una función de Morse discreta óptima no $\mathbb{Z}$-perfecta en el sombrero bobo.

Teorema 23 *Sea K un complejo celular K que admite una función de Morse discreta con 2 símplices críticos. Se tiene que:*

- *K es homotópicamente equivalente a una esfera $\mathbb{S}^n$.*
- *Si además K es una n-variedad triangulada sin borde, entonces K es homeomorfo a $\mathbb{S}^n$.*

Teorema 24 *Sea f una función de Morse discreta definida en un complejo K y sean $\tau^{(p+1)}$ y $\sigma^{(p)}$ dos símplices críticos de f tales que existe un único camino gradiente desde $\partial\tau$ a σ. Se tiene que:*

- *Existe otra función de Morse discreta g en K con los mismos símplices críticos que f salvo σ y τ.*
- *Además f y g coinciden en todo símplice fuera del camino gradiente mencionado.*

Definición 25 *Un proceso de cancelación reduce el número de pares de símplices críticos de una función de Morse discreta y consiste en:*

- ***Seleccionar** un par de símplices críticos conectados por un único V-camino.*
- ***Invertir** las flechas del V-camino considerado.*
- ***Mantener** el resto del campo gradiente tal como estaba definido.*

3 Generalización y comparación con Teoría de Morse clásica

3.1 Una generalización de la Teoría de Morse discreta

Definición 26

- *Dado un campo vectorial discreto V sobre un complejo simplicial K (V no es necesariamente un campo gradiente), se dirá que un símplice es* ***crítico respecto a V*** *si no pertenece a ningún par de V.*
- *Se llama* ***conjunto de cadenas recurrentes de V*** *al conjunto de símplices de K que o bien son críticos, o bien están contenidos en un V-camino cerrado.*
- *Dados dos símplices de K, se dirá que están en el mismo* ***conjunto básico de V*** *si existe un V-camino cerrado que los contiene a ambos. Un símplice crítico es un conjunto básico unitario.*

er

Definición 27 *Se definen los* ***números de Morse de V*** *como:*

$$m_i(V) = \sum_{\Lambda \in BasicSets(V)} dim H_i(\overline{\Lambda}, \overline{\Lambda} - \Lambda)\,,$$

donde $\overline{\Lambda}$ denota al subcomplejo generado por Λ.

Teorema 28 *Sea K un complejo simplicial de dimensión n sobre el que está definido el campo V. Se verifica que:*

- *$m_i(V) \geq b_i$ para todo $0 \leq i \leq n$.*
- *$m_k(V) - m_{k-1}(V) + \cdots \pm m_0(V) \geq b_k - b_{k-1} + \cdots \pm b_0$ para todo $0 \leq k \leq n$.*
- *$\mathcal{X}(K) = m_n(V) - m_{n-1}(V) + \cdots \pm m_0(V)$.*

Definición 29 *Sea K un complejo simplicial sobre el que está definido el campo V. Una función de* ***Lyapunov discreta*** *para V en K es cualquier función que asigna valores reales a los símplices de K de modo decreciente en los V-caminos no cerrados y constante en los cerrados.*

Teorema 30 *[R. Forman] Sea K un complejo simplicial sobre el que está definido el campo V. Se verifica que existe una función de Lyapunov discreta para V en K.*

3.2 Teoría de Morse discreta vs Teoría de Morse clásica

Teorema 31 *[E. Gallais - B. Benedetti] Sea M una variedad diferenciable cerrada que admite una función de Morse diferenciable con m_i puntos críticos de índice i. Dada una triangulación de M, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que la n_0-ésima subdivisión baricéntrica de dicha triangulación admite una función de Morse discreta con m_i símplices críticos de dimensión i.*

Teorema 32 *[E. Gallais] Bajo las hipótesis del resultado anterior, si además la función de Morse diferenciable es Morse-Smale, entonces las curvas integrales entre dos puntos críticos están en biyección con los caminos gradientes discretos entre los correspondientes símplices críticos.*

La Teoría de Morse discreta es tan fina como la Teoría de Morse clásica en la descripción de la topología de una variedad.

4 Teoría de Morse discreta vía Teoría de Emparejamientos

Definición 33 *El* ***diagrama de Hasse*** *de un complejo simplicial K es el grafo correspondiente al face poset del complejo dado, denotado por $\mathcal{H}(K)$.*

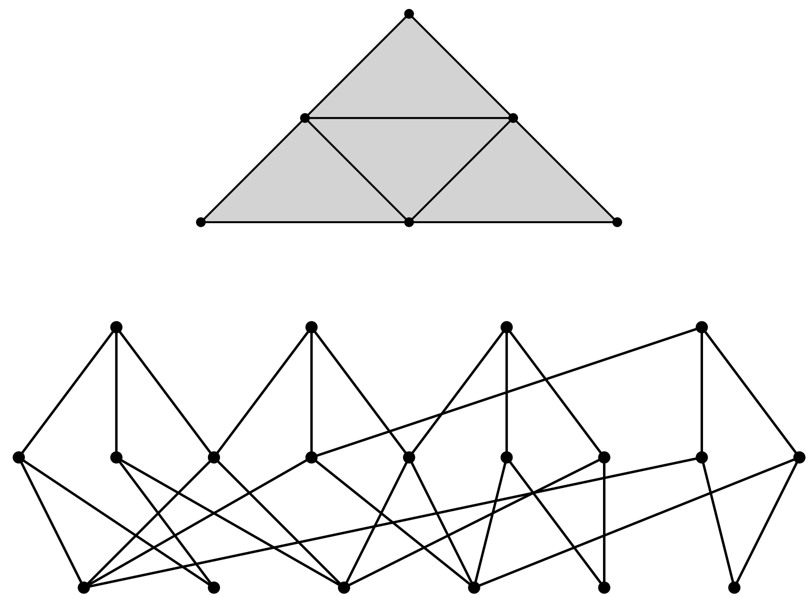


Figura 7: 2-complejo simplicial y el diagrama de Hasse asociado.

Definición 34 *Sea K un complejo simplicial y sea x un vértice del diagrama de $\mathcal{H}(K)$. Se dice que x es un vértice **up beat** si existe un único vértice $y > x$ en $\mathcal{H}(K)$.*

Proposición 35 *Dado un complejo K, sean $\sigma \in K$ y x_σ su correspondiente vértice en el diagrama de Hasse de K. Se verifica que σ es una cara libre de K si y solo si x_σ es un up beat point de $\mathcal{H}(K)$.*

Definición 36 *Sea K un complejo simplicial y sea x un up beat point de $\mathcal{H}(K)$. La **eliminación** de x en $\mathcal{H}(K)$ consiste en borrar x y todas las aristas de $\mathcal{H}(K)$ incidentes en en él, así como el único vértice $y > x$ incidente con x y todas las aristas incidentes en él.*

Proposición 37 *Dado un complejo K y σ una cara libre de K, se tiene que el colapso elemental por σ es equivalente a la eliminación del vértice x_σ en $\mathcal{H}(K)$. En consecuencia, un colapso generalizado en K equivale a la una eliminación sucesiva de up beat points en $\mathcal{H}(K)$, $\mathcal{H}(K - x_\sigma) \ldots$*

Definición 38

- *Dado un grafo G, un* ***emparejamiento*** *en G es un conjunto de aristas disjuntas dos a dos en G.*
- *Un emparejamiento se llama* ***máximo*** *si contiene el mayor número posible de aristas.*
- *Un emparejamiento M se llama* ***casi-perfecto*** *si $\exists$ un único vértice que no es cara de una arista de M.*
- *Un emparejamiento M se llama* ***perfecto*** *si todo vértice de G es cara de una arista de M.*

Definición 39 *Sea M un emparejamiento en un grafo G.*

- *Un* ***camino alternado*** *es un camino en G tal que sus aristas están alternativamente dentro y fuera de M.*
- *Un* ***camino de aumento*** *es un camino alternado que empieza y termina en vértices que no están en aristas de M.*

Definición 40

- *Un* ***i-camino alternado de Morse*** *es un i-camino alternado en el diagrama de Hasse de un complejo cuyos vértices corresponden alternativamente a i-símplices o $(i-1)$-símplices.*
- *Un* ***i-camino de aumento de Morse*** *es un i-camino alternado de Morse que además es de aumento.*
- *Un* ***emparejamiento de Morse*** *es un emparejamiento en el diagrama de Hasse de un complejo que no contiene caminos alternados de Morse cerrados.*

Definición 41 *Con el objeto de incrementar el número de aristas de un emparejamiento M se define un* ***proceso de transferencia*** *, que consiste en:*

- ***Seleccionar*** *un camino de aumento.*
- ***Consideramos*** *las aristas de dicho camino que no están en M.*
- ***No consideramos*** *las aristas de dicho camino que están en M.*

Teorema 42 *[P. Hersh] Toda función de Morse discreta f definida en un complejo simplicial K induce un emparejamiento de Morse en $\mathcal{H}(K)$ y el recíproco también es cierto. Los símplices críticos de f se corresponden con los vértices no emparejados en $\mathcal{H}(K)$.*

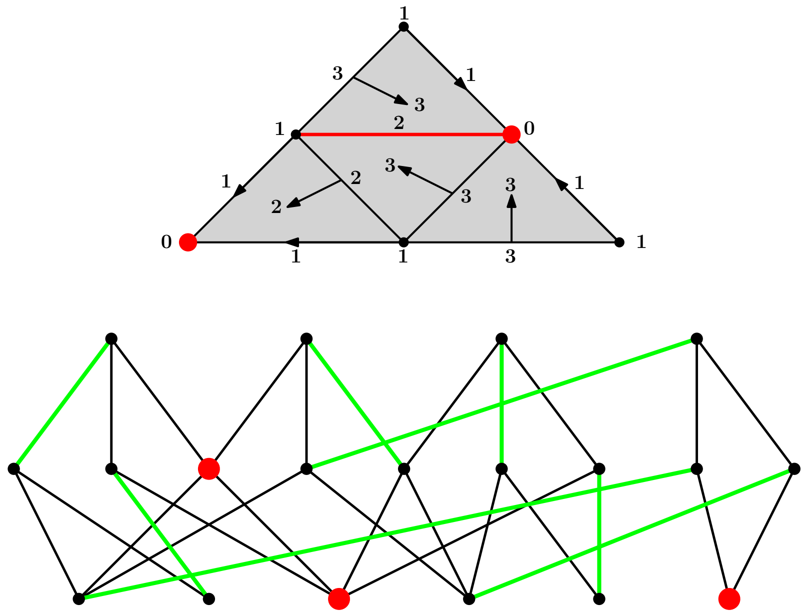


Figura 8: *Función de Morse discreta sobre un 2-complejo simplicial y el correspondiente emparejamiento de Morse en el diagrama de Hasse asociado.*

Proposición 43 *Sea f una función de Morse discreta definida en un complejo K cuyo campo gradiente inducido es V. Se tiene que todo V-camino en K induce un camino alternado de Morse en $\mathcal{H}(K)$ y el recíproco también es cierto.*

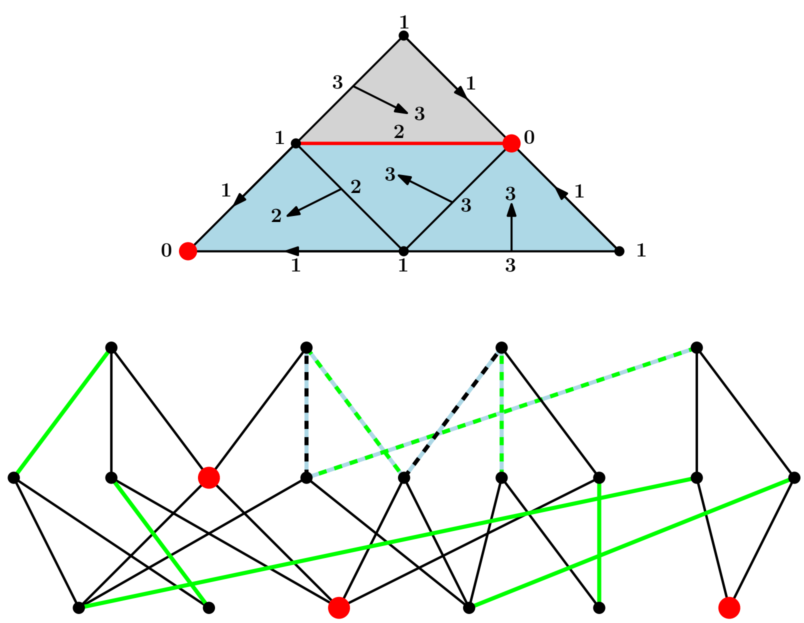


Figura 9: *V-camino y el correspondiente camino alternado de Morse en el diagrama de Hasse asociado al 2-complejo.*

Proposición 44 *Sea f una función de Morse discreta definida en un complejo K cuyo campo gradiente inducido es V. Se tiene que todo V-camino en K uniendo dos símplices críticos induce un camino de aumento de Morse en $\mathcal{H}(K)$ y el recíproco también es cierto.*

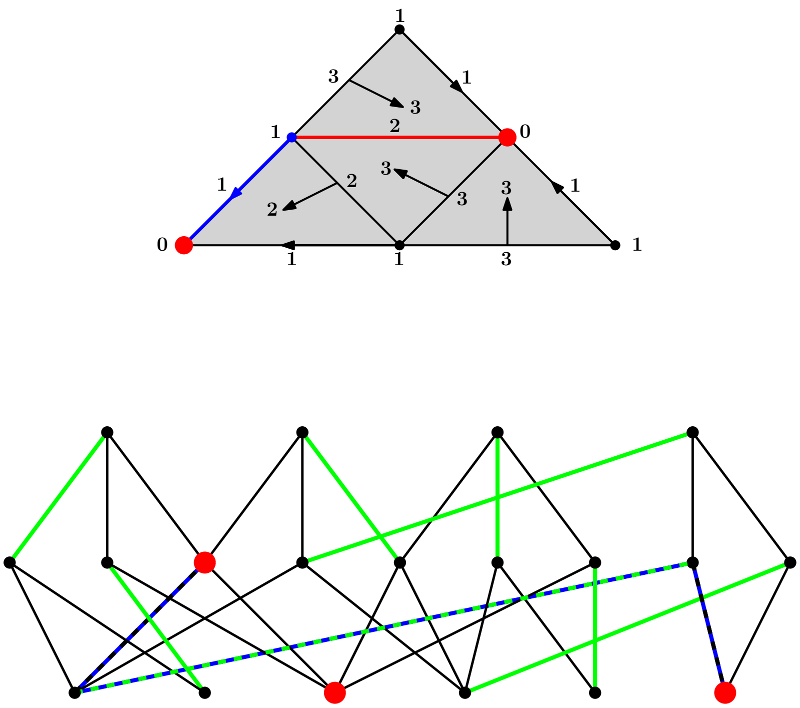


Figura 10: V-camino uniendo dos símplices críticos y el correspondiente camino de aumento de Morse en el diagrama de Hasse asociado al 2-complejo.

Teorema 45 *Bajo las hipótesis anteriores, toda función de Morse discreta óptima induce un emparejamiento de Morse máximo en $\mathcal{H}(K)$ y el recíproco también es cierto.*

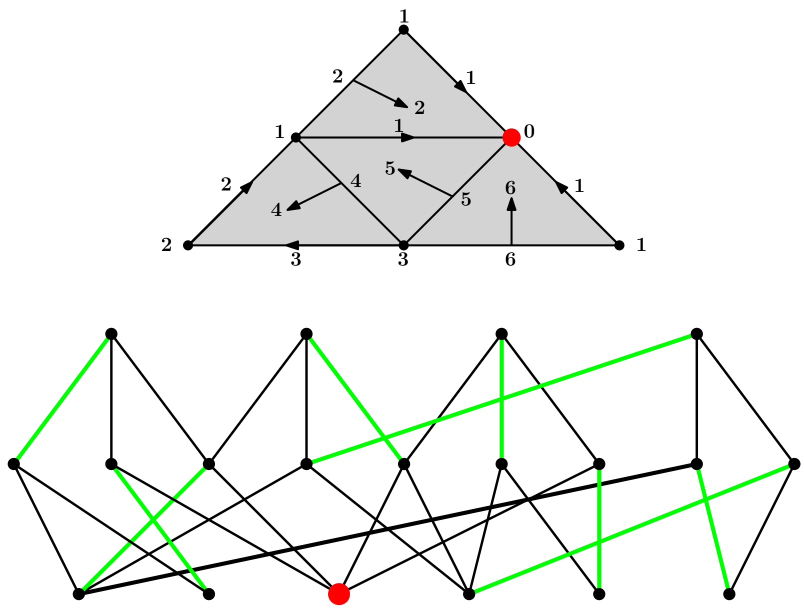


Figura 11: Función de Morse discreta óptima y el correspondiente emparejamiento de Morse máximo en el diagrama de Hasse asociado al 2-complejo.

Teorema 46 *Sea K un complejo simplicial finito con s símplices y sea f una función de Morse discreta definida en K. Se tiene que:*

1. $s - \sum_{i=0}^{n} m_i$ *y* $s - \sum_{i=0}^{n} b_i$ *son pares.*
2. *El número de aristas del emparejamiento de Morse inducido por f en $\mathcal{H}(K)$ es $\frac{s-\sum_{i=0}^{n} m_i}{2}$.*
3. $\lambda = \frac{s-\sum_{i=0}^{n} b_i(M)}{2}$ *es una cota superior del número de aristas de un emparejamiento de Morse máximo en $\mathcal{H}(K)$.*
4. *Dicha cota superior se alcanza si y solo si K admite una función de Morse discreta perfecta.*

Definición 47 *Un **proceso de cancelación** consiste en reducir el número de pares de símplices críticos de una función de Morse discreta siguiendo los pasos:*

- ***Seleccionar*** *un par de símplices críticos conectados por un único V-camino.*
- ***Invertir*** *las flechas del V-camino considerado.*
- ***Mantener*** *el resto del campo gradiente tal como estaba definido.*

Proposición 48 *Todo proceso de cancelación en un complejo induce un proceso de transferencia en el correspondiente diagrama de Hasse y el recíproco también es cierto.*

Teorema 49 *Un complejo es colapsable si y solo si su correspondiente diagrama de Hasse admite emparejamientos de Morse casi-perfectos.*

DICCIONARIO

Teoría de Morse discreta	**Teoría de emparejamientos**
Función de Morse discreta	*Emparejamiento de Morse*
Función de Morse discreta óptima $*$	*Emparejamiento de Morse máximo* $*$
Camino decreciente	*Camino alternado de Morse*
Camino decreciente entre 2 elementos críticos	*Camino de aumento de Morse*
Cancelación $*$	*Transferencia* $*$
Complejo colapsable $*$	$\exists$ *emparejamiento casi perfecto* $*$
$\nexists$ *símplices críticos*	$\exists$ *emparejamiento perfecto*

$*$ = *no se verifica en complejos infinitos.*

5 Teoría de Morse discreta en grafos

Definición 50 *Se dice que dos funciones de Morse discretas definidas sobre un complejo son* ***equivalentes*** *si ambas inducen el mismo campo gradiente.*

Proposición 51 *[R. Ayala, L.M. Fernández, J.A. Vilches] Dos funciones de Morse discretas equivalentes tienen los mismos elementos críticos, pero el recíproco NO es cierto.*

Teorema 52 *[R. Ayala, L.M. Fernández, D. Fernández-Ternero, J.A. Vilches] Dos funciones de Morse discretas definidas sobre un grafo son equivalentes si y solo si tienen los mismos elementos críticos.*

Definición 53 *Una función de Morse discreta se llama* ***excelente*** *si todos sus valores críticos son distintos.*

Lema 54 *Dada un función de Morse discreta f, existe otra función de Morse discreta excelente f' equivalente a f.*

Definición 55

- *Dos funciones de Morse discretas definidas sobre un grafo G con valores críticos respectivos $a_0, \ldots, a_{m-1}$ y $c_0, \ldots, c_{m-1}$ se llamarán* ***homológicamente equivalentes*** *si los subcomplejos de nivel $G(a_i)$ y $G(c_i)$ tienen los mismos números de Betti, $\forall i$.*
- *Sea f función de Morse discreta excelente definida en un grafo conexo G con valores críticos $a_0, \ldots, a_{m-1}$. Se definen las* ***sucesiones homológicas*** *como las dos aplicaciones $B_0, B_1 : \{0, 1, \ldots, m-1\} \longrightarrow \mathbb{N}$ dadas por:*

$$B_0(i) = b_0(G(a_i)) \quad B_1(i) = b_1(G(a_i))$$

Proposición 56 *Bajo las hipótesis anteriores, las sucesiones homológicas verifican:*

- $B_0(0) = B_0(m-1) = 1$, $B_0(i) > 0$, $|B_0(i+1) - B_0(i)| = 0, 1$.
- $B_1(0) = 0$, $B_1(m-1) = b_1$, $B_1(i+1) - B_1(i) = 0, 1$.
- *$\forall i$ se tiene solo una de las siguiente igualdades:*
  1. $B_0(i) = B_0(i+1)$.
  2. $B_1(i) = B_1(i+1)$.

Definición 57 *Sea f función de Morse discreta excelente definida en un grafo conexo G con valores críticos $a_0, \ldots, a_{m-1}$.*

- *Se dirá que un vértice crítico v es un* ***vértice esencial*** *si $f(v) = a_0$.*
- *Se dirá que una arista crítica e_i es una* ***arista esencial*** *si $B_1(i) - B_1(i-1) = 1$.*
- *Si un símplice crítico no es esencial se dirá que es un* ***símplice cancelable*** *.*

Proposición 58 *[R. Ayala, L.M. Fernández, D. Fernández-Ternero, J.A. Vilches] Sea f función de Morse discreta excelente definida en un grafo conexo G con $b_1(G) < +\infty$. Si $e = (v, w)$ es una arista crítica esencial, entonces $\exists$ un árbol spanning T en G tal que $e \notin T$ y $e + \widehat{vw}$ es un ciclo básico de $H_1(G)$ donde $\widehat{vw}$ es el único camino que une v y w en T.*

Teorema 59 *[R. Ayala, L.M. Fernández, D. Fernández-Ternero, J.A. Vilches] Sea f función de Morse discreta definida en un grafo conexo G con $b_1(G) < +\infty$. Se tiene que f es óptima si y solo si todas sus aristas críticas son esenciales.*

5.1 Contando funciones de Morse discretas excelentes en grafos

Teorema 60 *[R. Ayala, D. Fernández-Ternero, J.A. Vilches] Sea G un grafo conexo tal que $b_1(G) < +\infty$. Se verifica que el número de clases de equivalencia homológica de funciones de Morse discretas excelentes con $m = b_0(G) + b_1(G) + 2k$ símplices críticos es:*

- $C_k\binom{m-1}{2k}$ *si G es infinito o tiene al menos un vértice de valencia 1.*
- $C_k\binom{m-2}{2k}$ *si G es un grafo no trivial sin aristas puente.*
- $\sum_{j=0}^{k-1} C_j C_{k-j-1}(\binom{m-1}{2k} - \binom{2j+b_{12}+1}{2j}\binom{2(k-j)+b_{11}-2}{2(k-j)-1})$ *si G es finito, tiene al menos una arista puente y la valencia de cualquier vértice es mayor que 1 donde $b_{11} = min\{b_1(P_i) :\ F \cap P_i$ es un único vértice $\}$ y $b_{12} = b_1 - b_{11}$.*

6 Teoría de Morse discreta en complejos no compactos

6.1 Desigualdades de Morse generalizadas

Definición 61

- *Una sucesión infinita de símplices de M*

$$\alpha_0^{(i-1)}, \beta_0^{(i)}, \alpha_1^{(i-1)}, \beta_1^{(i)}, \dots, \beta_r^{(i)}, \alpha_{r+1}^{(i-1)}, \dots$$

  *es un **i-rayo** si verifica que los $(i-1)$-símplices $\alpha_{n-1}^{(i-1)}$ y $\alpha_n^{(i-1)}$ son caras distintas del i-símplice $\beta_{n-1}^{(i)}$ para todo $n \in N$.*

- *Dos i-rayos contenidos en el mismo complejo se dirán **cofinales** si coinciden a partir de un $(i-1)$-símplice común.*

- *Dada una función de Morse discreta f en K, se dirá que un i-rayo es **decreciente** si*

$$f(\alpha_0^{(i-1)}) \geq f(\beta_0^{(i)}) > \dots \geq f(\beta_r^{(i)}) > f(\alpha_{r+1}^{(i-1)}) \geq \cdots$$

Teorema 62 *[R. Ayala, L.M. Fernández, J.A. Vilches] Sea M una superficie triangulada no compacta conexa sin borde tal que $b_1(M) < +\infty$ y sea f una función de Morse discreta definida sobre M tal que $m_i(f), d_i(f) < +\infty$. Se tiene que:*

1. $m_0 + d_0 \geq 1$, $m_1 + d_1 \geq b_1$, $m_2 \geq b_2$.
2. $m_0 + d_0 - m_1 - d_1 + m_2 = 1 - b_1$.
3. $m_1 + d_1 - m_0 - d_0 \geq b_1 - 1$, $m_2 - m_1 - d_1 + m_0 + d_0 \geq 1 - b_1$.

donde d_i denota al número de i-rayos decrecientes no cofinales en M.

6.2 Elementos críticos de funciones de Morse propias

Definición 63 *Dada una función de Morse discreta definida definida sobre un complejo K, un* ***i-elemento crítico*** *de f es un i-símplice crítico o un $(i+1)$-rayo decreciente.*

Definición 64 *Se dirá que una función de Morse discreta f definida sobre un complejo no compacto K es* ***propia*** *si y solo si $f^{-1}[a, b]$ es un conjunto finito de símplices $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$.*

Proposición 65 *Dada una función de Morse discreta propia definida sobre un 2-complejo no compacto K, se verifica que $d_0 \geq d_1$.*

Teorema 66 *[R. Ayala, L.M. Fernández, J.A. Vilches] Dada una superficie no compacta de tipo finito M, existe una triangulación de M que admite funciones de Morse discretas con $b_1(M) + 1$ elementos críticos.*

6.3 Caracterización de campos gradientes en complejos infinitos

Definición 67 *Dados dos rayos r_1 y r_2 de dimensiones respectivas $d_1 < d_2$ en un complejo no compacto K, se dirá que r_1 es* ***incidente*** *a r_2 si todo símplice de r_1 salvo una cantidad finita está en el borde de r_2.*

Definición 68 *Dado un campo vectorial discreto V definido en un complejo no compacto localmente finito, se dirá que V contiene una **configuración prohibida** si existe un d_1-rayo creciente incidente a un d_2-rayo decreciente con $d_1 < d_2$.*

Teorema 69 *[R. Ayala, J.A. Vilches, G. Jerše, N. Mramor-Kosta] Un campo vectorial discreto V definido en un complejo no compacto localmente finito K es el campo gradiente inducido por una función de Morse discreta propia si y solo V no contiene V-caminos cerrados ni configuraciones prohibidas.*

7 Funciones de Morse discretas óptimas/perfectas

Definición 70 *Se dirá que una función de Morse discreta $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ es **óptima** si el número de símplices críticos de f es mínimo.*

Definición 71 *Se dirá que una función de Morse discreta $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ es **$\mathbb{F}$-perfecta** si $m_i(f) = b_i(K; \mathbb{F})$ para todo $i = 0, \dots, dim(K)$*

Proposición 72 *Todo grafo admite funciones de Morse discretas $\mathbb{Z}$-perfectas.*

Corolario 73 *Todo complejo que colapse a un grafo admite funciones de Morse discretas $\mathbb{Z}$-perfectas (triangulaciones de superficies con borde).*

Proposición 74 *Sea K un 2-complejo simplicial conexo que admite funciones de Morse discreta $\mathbb{Z}$-perfectas. Se verifica que:*

- *Si K es acíclico, entonces K es colapsable.*
- *Si $b_1(K;\mathbb{Z}) = 0$ y $b_2(K;\mathbb{Z}) \neq 0$, entonces K es del mismo tipo de homotopía que un wedge de 2-esferas.*
- *Si $b_1(K;\mathbb{Z}) \neq 0$ y $b_2(K;\mathbb{Z}) = 0$, entonces K es del mismo tipo de homotopía que un grafo, es decir, que un wedge de circunferencias.*

Corolario 75 *Sea K un 2-complejo acíclico y no colapsable, entonces K no admite funciones de Morse discretas $\mathbb{Z}$-perfectas.*

Definición 76 *Se define el* **número de colapso** *de un 2-complejo K, denotado por $co(K)$, como el mínimo número de 2-símplices $\tau_1, \ldots, \tau_{co(K)}$ que hay que eliminar en K para que $K - \{\tau_1, \ldots, \tau_{co(K)}\}$ colapse a un grafo.*

Teorema 77 *[R. Ayala, D. Fernández-Ternero, J.A. Vilches] Dado un 2-complejo K, se tiene que K admite funciones de Morse discretas $\mathbb{Z}$-perfectas si solo si $co(K) = b_2(K;\mathbb{Z})$.*

Corolario 78 *Sea K una triangulación de una superficie compacta sin borde. Se tiene que K admite funciones de Morse discretas $\mathbb{Z}$-perfectas si y solo si K es orientable.*

Teorema 79 *[R. Ayala, D. Fernández-Ternero, J.A. Vilches] Sea K un 2-complejo acíclico y no colapsable, entonces K no admite funciones de Morse discretas F-perfectas para ningún F.*

Proposición 80 *Toda triangulación de una superficie compacta no orientable sin borde admite funciones de Morse discretas $\mathbb{Z}_2$-perfectas.*

PROBLEMA: **Construir funciones de Morse discretas óptimas/perfectas**

Dado un 2-complejo K, dar un procedimiento algorítmico que construya una función de Morse discreta óptima sobre K.

Solución: *Algoritmo lineal que da una función de Morse discreta definida sobre un 2-complejo, pero que garantiza la optimalidad solo para superficies (con y sin borde) [T. Lewiner, H. Lopes, G. Tavares].*

Definición 81 *Dada una 3-variedad triangulada cerrada y orientable M, se dirá que un 2-subcomplejo S es un* ***spine*** *de M si $M - \Delta$ colapsa a S, siendo Δ un tetraedro de M.*

Teorema 82 *[R. Ayala, D. Fernández-Ternero, J.A. Vilches] Sea M una 3-variedad triangulada cerrada y orientable. Se tiene que M admite funciones de Morse discretas $\mathbb{F}$-perfectas si y solo si existe S, un spine de M, que admite tales funciones.*

Definición 83 *Dadas dos 3-variedades cerradas trianguladas K y L, la* ***suma conexa*** *de ambas, denotada por $K \sharp L$, se construye del siguiente modo:*

- *Elegimos dos 3-símplices σ y τ en K y L, respectivamente.*
- *Identificamos en $(K - \sigma) \cup (L - \tau)$ los símplices de los bordes de σ y τ mediante una aplicación de pegamiento simplicial.*

Definición 84 *Una 3-variedad triangulada conexa M se llama* ***prima*** *si $M = K \sharp L$ implica $K = \mathbb{S}^3$ o $L = \mathbb{S}^3$.*

Teorema 85 *[H. Knesser - J. Milnor] Sea M una triangulación de una 3-variedad compacta conexa y orientable. Existe una descomposición única (salvo inserción o eliminación de $\mathbb{S}^3$) del tipo*

$$M = P_1 \sharp \cdots \sharp P_n \, ,$$

donde cada P_i es prima, $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 86 *[R. Ayala, D. Fernández-Ternero, J.A. Vilches] Sea $M = M_1 \sharp M_2$ una descomposición de una 3-variedad conexa cerrada y orientable. Si existen triangulaciones K_i de M_i admitiendo funciones de Morse discretas $\mathbb{F}$-perfectas para $i = 1, 2$ entonces existe una triangulación K de M que admite ese tipo de funciones.*

Teorema 87 *[N. Mramor-Kosta, M. Pamuk, H. Varlı] Sea M una suma conexa de 3-variedades trianguladas conexas, cerradas y orientables M_1 y M_2. Si M admite una función de Morse $\mathbb{Z}$-perfecta, entonces existen subdivisiones (posiblemente locales) $\widetilde{M}_i$ de M_i que admiten funciones de Morse discretas $\mathbb{Z}$-perfectas, $i = 1, 2$.*

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

[1] *Forman, R.: Morse Theory for cell complexes, Adv. Math.* ***134*** *(1) (1998), 90-145.*

[2] *Forman, R.: A user's guide to discrete Morse theory, Séminaire Lotharingien de Combinatoire* ***48*** *(2002), Article B48c.*

[3] *Knudson, K.P.: Morse Theory: Smooth and Discrete, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, New Jersey, 2015.*

BIBLIOGRAFÍA TMD

[4] *Ayala, R.; Fernández, L.M.; Vilches, J.A.: Morse inequalities on certain infinite 2-complexes, Glasg. Math. J.* ***49*** *(2) (2007) 155-165.*

[5] *Ayala, R.; Fernández, L.M.; Vilches, J.A.: Characterizing equivalent discrete Morse functions, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* ***40*** *(2) (2009) 225-235.*

[6] *Ayala, R.; Fernández, L.M.; Fernández-Ternero, D.; Vilches, J.A.: Discrete Morse theory on graphs, Topology Appl.* ***156*** *(18) (2009), 3091-3100.*

[7] *Ayala, R.; Fernández-Ternero, D.; Vilches, J.A.: The number of excellent discrete Morse functions on graphs, Discrete Appl. Math.* ***159*** *(16) (2011), 1676-1688.*

[8] *Ayala, R.; Fernández-Ternero, D.; Vilches, J.A.: Perfect discrete Morse functions on 2-complexes, Pattern Recogn. Lett.* ***33*** *(11) (2012), 1495-1500.*

[9] *Ayala, R.; Fernández-Ternero, D.; Vilches, J.A.: Perfect discrete Morse functions on triangulated 3-manifolds, Computational Topology in Image Context, Lecture Notes in Computer Sci., Springer, Heidelberg* ***7309*** *(2012), 11-19.*

[10] *Ayala, R.; Vilches, J.A.; Jerše, G.; Mramor-Kosta, N.: Discrete gradient fields on infinite complexes, Discrete Contin. Dyn. Syst.* ***30*** *(3) (2011), 623-639.*

[11] *Benedetti, B.: Discrete Morse theory is at least as perfect as Morse theory. Preprint (2010) at arxiv:1010.0548.*

[12] *Forman, R.: Combinatorial vector fields and dynamical systems, Math. Z.* ***228*** *(4) (1998), 629-681.*

[13] *Gallais, E.: Combinatorial realization of the Thom-Smale complex via discrete Morse theory, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* ***9*** *(2010), no. 2, 229?252.*

[14] *Hersh, P.: On optimizing discrete Morse functions, Adv. Appl. Math.* ***35*** *(3) (2005), 294-322.*

[15] *Lewiner, T.; Lopes, H.; Tavares, G.: Optimal discrete Morse functions for 2-manifolds, Comput. Geom.* ***26*** *(3) (2003) 221-233.*

[16] *Milnor, J.: A unique decomposition theorem for 3-manifolds, Amer. J. Math.* ***84*** *(1962), 1-7.*

[17] *Mramor-Kosta, N.; Pamuk, M.; Varlı, H.: Decomposing perfect discrete Morse functions on connected sum of 3-manifolds, Topology Appl.* ***260*** *(2019), 139-147.*

DESAMPARADOS FERNÁNDEZ TERNERO
DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
UNIVERSIDAD DE SEVILLA