h-regularización de espacios topológicos finitos

Julián Cuevas-Rozo, Laureano Lambán, Ana Romero, Humberto Sarria

Un *espacio topológico finito* (o simplemente, *espacio finito*) es un par (X, T) donde X es un conjunto finito y T es una topología definida sobre X. Es bien conocida la correspondencia biunívoca entre los conjuntos finitos preordenados y los espacios finitos [1], dada por la relación $x \leqslant y \iff x \in U_y$, donde U_y es el abierto minimal que contiene al elemento y en el espacio que estemos considerando. Así mismo, los espacios finitos que satisfacen el axioma de separación T_0 (espacios finitos T_0) están en correspondencia biyectiva con los conjuntos finitos parcialmente ordenados (posets, de *partially ordered sets*).

Desde el punto de vista de la homotopía, el estudio de los espacios finitos puede desarrollarse en el contexto de los espacios T_0. Stong [8] demuestra que para cada espacio finito X existe un espacio finito T_0 homotópicamente equivalente a X. Además, en ese mismo artículo establece la noción de *core* de X, definido como el menor espacio (respecto a la inclusión) con el mismo tipo de homotopía que X, el cual puede ser obtenido a través de la eliminación sucesiva de elementos conocidos en la literatura como *beat points* (Stong los denomina *linear and colinear points*). Si un espacio finito T_0 no tiene beat points se dice que es un espacio *minimal*, por lo que un core de X es un retracto por deformación fuerte que es también un espacio minimal. El concepto de core caracteriza el tipo de homotopía en la teoría de los espacios topológicos finitos: el core de un espacio finito es único salvo homeomorfismo y más aún, dos espacios finitos son homotópicamente equivalentes si y solo si sus cores son homeomorfos.

Por otra parte, McCord [6] demuestra la existencia de una equivalencia de homotopía débil entre un espacio finito X y la realización geométrica $|\mathcal{K}(X)|$ de su *complejo simplicial asociado* $\mathcal{K}(X)$, cuyos símplices son las cadenas no vacías de X. De manera recíproca, dado un complejo simplicial finito K, existe una equivalencia de homotopa débil entre $|K|$ y su *poset asociado* $\mathcal{X}(K)$, formado por los símplices de K ordenados por inclusión.

La noción de CW-complejo regular (o simplemente, complejo regular) es generalizada a través del concepto de complejo *h-regular* [2], que se refiere a aquellos CW-complejos donde toda celda cerrada es un subcomplejo contraíble. Decimos que un espacio finito X es un *modelo* de un CW-complejo Y, si $|\mathcal{K}(X)|$ es homotópicamente equivalente a Y. En [2, Teorema 4.7], se demuestra que si K es un complejo h-regular finito entonces $\mathcal{X}(K)$ es un modelo de K, donde $\mathcal{X}(K)$ es el poset formado por las celdas de K ordenadas por la relacin $e \leqslant e' \iff e \subseteq \overline{e'}$ (de hecho, se define de manera recursiva una equivalencia de homotopa débil $|K| \to \mathcal{X}(K)$, generalizando de esta forma el resultado de McCord para complejos simpliciales finitos).

Teniendo en cuenta la definición de complejo h-regular, en [7] se propone una noción análoga a nivel de posets y, por tanto, de espacios topológicos. Un espacio finito X se dice *h-regular* si para cada elemento $x \in X$, el abierto $\widehat{U}_x := U_x - \{x\}$ es un modelo de la esfera S^{n-1}, siendo n la altura de x en X (visto como poset); el poset asociado a un complejo h-regular finito (en particular, a un complejo regular) es un espacio h-regular.

Respecto del cálculo de invariantes topológicos, los resultados de McCord garantizan una equivalencia de homotopía débil entre X y $\mathcal{K}(X)$, lo que en particular permite, al menos en teoría, el cómputo de invariantes topológicos de X (por ejemplo sus grupos de homotopía y de homología) a través del cálculo de dichos invariantes sobre el complejo simplicial $\mathcal{K}(X)$, haciendo uso de herramientas como las desarrolladas en el sistema de cálculo simbólico Kenzo [5]. Sin embargo, el tamaño de $\mathcal{K}(X)$ crece rápidamente al incrementar el tamaño de X, lo que lo hace poco adecuado desde el punto de vista computacional; por lo tanto, es razonable desarrollar métodos algorítmicos que puedan ser aplicados directamente sobre espacios topológicos finitos.

En [7] se presentan algunos resultados que permiten hacer cálculos homológicos para algunas clases particulares de espacios finitos. Recientemente Cianci y Ottina [3] han generalizado los resultados de [7], definiendo de manera apropiada una sucesión espectral que converge a la homología de un espacio finito (más aún, se introduce la noción de espacio *cuasicelular* que generaliza la de espacio h-regular y la de espacio celular [7]). Por medio del complejo de cadenas descrito en [3, Corolario 2.15], en un trabajo previo se han implementado algoritmos efectivos en Kenzo para calcular los grupos de homología de espacios h-regulares y se ha hecho uso de campos de vectores discretos para reducir el tamao del complejo de cadenas involucrado [4]. Así las cosas, con el propósito de utilizar los algoritmos presentados en [4], aplicables a espacios h-regulares, dado un espacio finito X tenemos dos opciones: aplicar directamente los algoritmos mencionados, solo en caso de que X sea h-regular, o aplicarlos sobre su *subdivisión baricéntrica* $X' := \mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$ (el cual es siempre un espacio h-regular por ser el poset asociado a un complejo simplicial finito); sin embargo, cuando X no cumple la propiedad de h-regularidad, el clculo de X' conlleva un alto coste computacional, lo que motiva a buscar alternativas de modificación del espacio X o de construcción de otros espacios para poder usar los algoritmos.

En esta charla explicaremos un método para construir, a partir de un espacio minimal X, otro espacio X_h con el mismo tipo de homotopía débil que X con la propiedad de que el subespacio $X_h^{(2)}$, formado por los elementos de altura menor o igual que 2, es un espacio h-regular y, además, $X_h - X_h^{(2)} = X - X^{(2)}$, esto es, se mantienen sin modificaciones los elementos de alturas superiores a 2; la construcción de X_h se realiza a través de *3-deformaciones* aplicadas a X. En particular, si X es un espacio finito de altura menor o igual que 2, podemos encontrar un espacio h-regular X_h con el mismo tipo de homotopa débil que X, permitiendo aplicar los algoritmos de cálculo de homología descritos en [4] al espacio X_h, el cual tiene un menor nmero de elementos que la subdivisión baricéntrica X'. La construcción de X_h ya ha sido implementada en el sistema Kenzo.

References

[1] Alexandroff P., 'Diskrete Rume',*Mat. Sb. (N.S.)* **2**, 501–518 (1937).

[2] Barmak J.A. & Minian E.G., 'One-point reductions of finite spaces', hregular CWcomplexes and collapsibility, *Algebraic & Geometric Topology* **8**(3), 1763-1780 (2008).

[3] Cianci N. & Ottina M., 'A new spectral sequence for homology of posets', *Topology and its Applications* **217**, 1–19 (2017).

[4] Cuevas-Rozo J., Lambán L., Romero A. & Sarria H., 'Effective homological computations on finite topological spaces', *(en revisión).*

[5] Dousson X., Rubio J., Sergeraert F. & Siret Y., 'The Kenzo program', Institut Fourier, `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~sergerar/Kenzo/` (1999).

[6] McCord M.C., 'Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces', *Duke Math. J.* **33**(3), 465–474 (1966).

[7] Minian E.G., 'Some remarks on Morse theory for posets, homological Morse theory and finite manifolds', *Topology and its Applications* **159**(12), 2860–2869 (2012).

[8] Stong R.E., 'Finite topological spaces', *Trans. Amer. Math. Soc.* **123**(2), 325–340 (1966).