Actas do Seminario de Iniciación Á Investigación - ISSN 2171-6536

Por que as pompas de xabón son redondas?

Área de Xeometría e Topoloxía

Alberto Rodríguez Vázquez

Universidade de Santiago de Compostela

20 de setembro de 2017

Desigualdade isoperimétrica en $\mathbb{R}^2$

Conta Virxilio na Eneida que tras unha guerra civil na cidade fenicia de Tiro (actual Líbano), o rei Pigmalión venceu dando morte ó sumo sacerdote Acerbas, apoderándose así das súas riquezas. Foi entón cando Dido, a irmá de Pigmalión e esposa de Acerbas, fuxiu cos seus partidarios e encabezou unha expedición que cruzou o Mediterráneo ata chegar ás costas da actual Túnez. Alí, fundaría a cidade que sería coñecida como Cartago, a capital do gran imperio cartaxinés. Dido negociou co xefe da tribu local a adquisición de terras para fundar tal cidade. Este, receloso á chegada de forasteiros, concedeulles ós nosos protagonistas a porción de terreo que puidesen abarcar cunha pel de touro. Dido, facendo uso dun gran inxenio, cortou a pel en forma de tiras e formou unha cinta de gran lonxitude de tal xeito que conseguíu delimitar unha extensa porción de terra. ¿Que curva debuxou Dido coa cinta da que dispoñía para abarcar un recinto de área máxima, considerando que se atopaba xunto ó Mediterráneo? Os gregos coñecían o feito de que no plano a curva que pecha maior área de entre todas as que teñen unha lonxitude fixa é a circunferencia. Isto pódese reformular do seguinte xeito:

Teorema 1 (Desigualdade isoperimétrica)**.** *Sexa Γ unha curva de Jordan rectificable que ten lonxitude l e pecha unha rexión de área A. Entón satisfaise a seguinte desigualdade*

$$4\pi A \leq l^2.$$

Unha proba moi breve foi dada polo matemático alemán Hurwitz en 1902. Primeiro, precisaremos unha desigualdade moi utilizada no cálculo de variacións coñecida como desigualdade de Wirtinger que acota a norma L^2 dunha función pola norma L^2 da súa derivada. A súa proba é moi sinxela e baséase en expresar a función e a súa derivada en series de Fourier e utilizar a desigualdade de Bessel.

Proposición 1 (Desigualdade de Wirtinger)**.** *Sexa f unha función real de variable real derivable a trozos con derivada continua de período 2π. Sexa $\overline{f} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$, o valor medio de f. Entón tense a seguinte desigualdade:*

$$\int_0^{2\pi} (f(\theta) - \overline{f})^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} (f'(\theta))^2 d\theta.$$

Palabras Clave: xeometría de superficies; tensión superficial; desigualdade isoperimétrica.

A igualdade tense se e só se $f(\theta) = \overline{f} + a\cos(\theta) + b \operatorname{sen}\theta$ *con* $a, b \in \mathbb{R}$.

Lembremos que o Teorema de Green permítenos calcular a área da superficie pechada por unha curva de Jordan no plano. Se p e q son funcións diferenciables no plano e Γ é unha curva de Jordan de clase 1 acotando unha rexión $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, entón

$$\oint_\Gamma p(x,y)dx + q(x,y)dy = \iint_\Omega q_x(x,y) - p_y(x,y)dxdy.$$

Agora, se tomamos $p(x,y) = 0$ e $q(x,y) = x$, tense que

$$\oint_\Gamma xdy = \iint_\Omega dxdy = A(\Omega).$$

Demostración do Teorema 1. Supoñamos que a curva fronteira ten lonxitude l e que está parametrizada polo parámetro lonxitude de arco. Entón hai dúas funcións $x(s), y(s)$ que satisfán $(\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2 = 1$. Definimos a partir destas funcións dúas novas: f e g, de xeito que teñan período 2π e así poidamos empregar a desigualdade de Wirtinger.

$$f(\theta) = x\left(\frac{l\theta}{2\pi}\right), \quad g(\theta) = y\left(\frac{l\theta}{2\pi}\right).$$

Por outro lado, aplicando a regra da cadea obtemos que

$$f'(\theta)^2 + g'(\theta)^2 = \frac{l^2}{4\pi^2}. \tag{1}$$

Observemos tamén que, por ser g de período 2π, a integral de $g'(\theta)$ entre 0 e 2π é nula. Tendo en conta as consideracións anteriores, empregando a identidade de polarización e aplicando a desigualdade de Wirtinger, temos o seguinte

$$\begin{aligned} 2A =& 2\int_0^l x(s)y'(s)ds = 2\int_0^l f\left(\frac{2\pi}{l}s\right)g'\left(\frac{2\pi}{l}s\right)\frac{2\pi}{l}ds \underset{\theta = \frac{2\pi s}{l}}{\underset{\downarrow}{=}} 2\int_0^{2\pi} f(\theta)g'(\theta)d\theta \\ =& 2\int_0^{2\pi} (f(\theta) - \overline{f})g'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} (f(\theta) - \overline{f})^2 + (g'(\theta))^2 - (f(\theta) - \overline{f} - g'(\theta))^2 d\theta \\ \leq& \int_0^{2\pi} f'(\theta)^2 + g'(\theta)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{l^2}{4\pi^2}d\theta = \frac{l^2}{2\pi}. \end{aligned}$$

A igualdade desta última expresión forza á igualdade na desigualdade de Wirtinger. Polo tanto, $f(\theta) = \overline{f} + a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta$ para certos $a, b \in \mathbb{R}$. A igualdade tamén obriga a que $\int_0^{2\pi}(f - \overline{f} - g')^2 d\theta = 0$, polo que $g' = f - \overline{f}$. Polo tanto, $g(\theta) = \overline{g} + a\operatorname{sen}\theta - b\cos\theta$. Por último, (1) implica que $a^2 + b^2 = \frac{l^2}{4\pi^2}$. Así que $(x(s), y(s))$ é a circunferencia de radio $\frac{l}{2\pi}$, é dicir, a circunferencia de lonxitude l. $\square$

A física e a química das solucións xabonosas.

Se un día imos ó río e este está suficientemente limpo, observaremos que sobre a superficie da auga hai unhas criaturas coñecidas como zapateiros, que levan por nome científico '*Gerris lacustris*', que parecen camiñar sobre ela. Para nós pode parecer imposible camiñar sobre a auga pero estes insectos poden facelo grazas a unha propiedade da mesma chamada tensión superficial. O que está ocurrindo é que a superficie da auga compórtase igual que un trampolín, é dicir, presenta certa flexibilidade e cúrvase polo peso do zapateiro. Supoñamos que temos un recipiente cun líquido ubicado nun medio gaseoso. Nesta situación, as moléculas no interior do líquido están sometidas a forzas de atracción que promediadas nun tempo macrooscópico serán nulas. Pola contra, se tomamos unha molécula próxima á superficie experimentará unha forza menor polo gas que hai enriba xa que a densidade do gas é menor que a do líquido. Polo tanto, estas moléculas experimentarán en promedio unha forza que as leva cara ó interior do fluído, provocando que a área da superficie sexa reducida ata o mínimo posible.

A tensión superficial σ defínese como o módulo da forza F que actúa tanxencialmente por unidade de lonxitude l no borde dunha superficie dun líquido en equilibrio:

$$\sigma = \frac{F}{l}.$$

As súas unidades son $\mathrm{N \cdot m^{-1}, J \cdot m^{-2}}$. As solucións xabonosas teñen a propiedade remarcable de formar pompas e películas estables. Unha película xabonosa consiste en dúas superficies separadas por unha fina capa de fluído que pode variar en grosor dende os $2 \cdot 10^{-5}$Å ata os 50Å. O grosor máximo ocurrirá xusto despois da formación da película. Unha vez se forme esta, comezará a adelgazar. Os xabóns son substancias surfactantes ou tensioactivas, é dicir, reducen a tensión superficial. Ademais, estabilizan as películas xabonosas porque crean unha repulsión entre ambas superficies da película impedíndolles adelgazar e, consecuentemente, que estoupen. Para máis información sobre o tema pódese consultar [1].

Vexamos máis polo míudo como a tensión superficial provoca que a área dunha película de xabón sexa minimizada. Para obter unha expresión para a enerxía da película xabonosa consideremos unha que teña por bordo un arame rectangular $ABCD$ de lonxitude l, cun dos dous lados do arame libre para se mover na dirección perpendicular a BC como na Figura 1. Se este lado está a unha distancia inicial x do lado paralelo fixado e experimenta un desprazamento δx, o traballo realizado contra a tensión será

$$\delta W = F\delta x = 2\sigma l \delta x = 2\sigma \delta A,$$

onde 2σ é a tensión superficial do fluído multiplicada por 2, xa que a película consta de dúas superficies.

Polo tanto, o traballo necesario para incrementar a área dunha película xabonosa de 0 ata A vén dado por

$$W = \int_0^A 2\sigma dA.$$

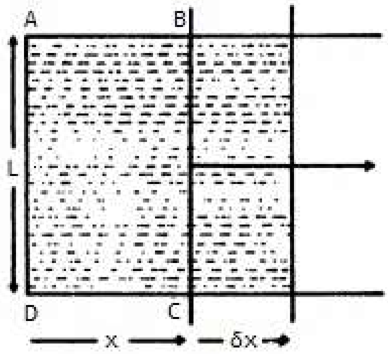

Figure 1: Enerxía dunha película xabonosa.

Se a concentración de moléculas tensioactivas é grande tense que σ non depende da área, polo que

$$W = 2\sigma A.$$

A enerxía dunha película de xabón é propocional á súa área. Polo tanto, para que a película de xabón estea en equilibrio estable, deberá minimizar a súa enerxía, e como consecuencia, minimizar a súa área.

A desigualdade isoperimétrica en $\mathbb{R}^3$

Dada unha superficie M en $\mathbb{R}^3$ sabemos que H, a curvatura media de M, non é máis que a media aritmética dos autovalores do operador forma. Nesta sección daremos un resultado que clasifica as superficies compactas de curvatura media constante. Para comezar, reparemos no feito de que se unha superficie é minimal, é dicir $H \equiv 0$, a súa curvatura de Gauss, K, é non positiva. Sabemos ademais que toda superficie compacta M ten polo menos un punto elíptico, é dicir, existe $p \in M$ tal que $K(p) > 0$. Polo tanto, se unha superficie é minimal non pode ser compacta. Entón se a nosa superficie é compacta e ten curvatura media constante esa constante é distinta de 0.

Como son as superficies compactas con curvatura media constante? O Teorema de Alexandrov responderá a esta pregunta. Para iso será necesario botar man de dous resultados clásicos que se obteñen a partir do estudo das propiedades dos operadores diferenciais elípticos, o principio do máximo interior e o principio do máximo na fronteira.

Toda superficie regular M pode ser expresada localmente como o grafo dunha función diferenciable φ nunha veciñanza do cero. Dicimos que $M_1 \leq M_2$ se $\varphi_1 \leq \varphi_2$. A demostración dos seguintes resultados pode ser atopada en [3].

Teorema 2 (Principio do máximo interior). *Sexan M_1, M_2 superficies regulares de $\mathbb{R}^3$, con curvaturas medias H_1, H_2 respectivamente. Supoñamos que $H_1 \geq H_2$ e que* *existe $p \in M_1 \cap M_2$, tal que $M_1 \leq M_2$ en p. Entón existe O, veciñanza de p en $\mathbb{R}^3$, tal que M_1 e M_2 coinciden en O.*

Por outra banda, tamén será necesario empregar a seguinte caracterización da esfera.

Teorema 3 ([3])**.** *Sexa M unha superficie conexa e compacta. Se para cada dirección $d \in S^2$ existe un plano π_d normal a d, de xeito que M sexa simétrica respecto a π_d, entón M é unha esfera.*

Teorema 4 (Teorema de Alexandrov)**.** *Sexa M unha superficie conexa e compacta con curvatura media constante, entón M é unha esfera.*

Demostración. Escollamos unha dirección d e un plano π perpendicular a d que non interseque a M. Pola compacidade de M temos garantido que se deslizamos π ó longo de d haberá un primeiro punto de contacto entre M e π. Seguimos movendo o plano unha distancia $\varepsilon > 0$ na dirección de d. Chamaremos a este plano π_ε. O plano π_ε interseca a M. Reflexamos M sobre π_ε e chamamos a imaxe de M por esta reflexión M_ε. Agora incrementamos ε ata que ocorra que o lado de M_ε que queda por enriba de π_ε toca a M nun punto que non estea sobre o plano π_ε.

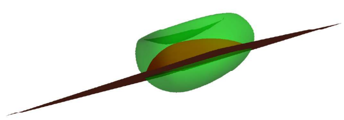

Figure 2: Caso de punto común no interior.

Nese caso temos un punto de contacto interior entre M e M_ε. Polo Teorema 2 temos que existirá unha veciñanza común a M_ε e M, xa que M e M_ε teñen a mesma curvatura media. Como a dirección d foi tomada de xeito arbitrario, temos que para cada dirección hai un plano de simetría e polo Teorema 3, concluímos que M é unha esfera por un argumento de compacidade. □

Antes de probar que a esfera é a solución do problema isoperimétrico en $\mathbb{R}^3$, observemos que é equivalente atopar un conxunto que maximice o volume para unha área dada e atopar un conxunto que minimice área para un volume dado.

Teorema 5 (Osserman, [2])**.** *Se M ten menor área de entre todas as superficies que pechan un volume dado, M é unha esfera.*

Demostración. Supoñamos un dominio Ω en $\mathbb{R}^3$ limitado por unha superficie M con parametrización $\mathbb{X}$ que satisfai a propiedade do enunciado. Sexa $h\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función diferenciable e denotemos por M_t a superficie dada pola parametrización $\mathbb{X}^t(u,v) = \mathbb{X}(u,v) + th(u,v)N(u,v)$, onde N é o vector normal a M. Se $A(t)$ é a área de M_t e $V(t)$ o volume pechado por M_t, as fórmulas da primeira variación da área e o volume son, respectivamente

$$A'(0) = -\int_M hHdA, \qquad V'(0) = \int_M hdA.$$

Supoñamos que existe h tal que $V'(0) = 0$ e $A'(0) \neq 0$. Aplicando unha homotecia de razón $(V/V(t))^{\frac{1}{3}}$ a M_t obtemos unha superficie $\hat{M}_t$ que limita un volume V e unha área $\hat{A}(t)$. Para valores pequenos de t será máis grande ou máis pequena que A segundo o signo de t. Polo tanto, para que a nosa superficie teña área mínima de entre todas as que acotan un volume V deberá ser certo que se $\int_M hdA = 0$ e entón $\int_M hHdA = 0$. Vexamos que isto implica que H é constante. Supoñamos que existen dous puntos, p e q en M con $H(p) \neq H(q)$. Nese caso, podemos tomar unha función h tal que sexa nula agás nunha veciñanza de p e de q, onde toma valores opostos. Deste xeito teremos que $\int_M hdA = 0$, pero $\int_M hHdA > 0$. Xa vimos que isto non pode suceder se M minimiza área para un volume prefixado. Entón como M é compacta e ten curvatura media constante, polo Teorema 4 é unha esfera. $\square$

Deste xeito, como as pompas de xabón tenden a minimizar a súa área, tense que estas adoptarán forma esférica.

Bibliografía

[1] C. Isenberg (1992). *The science of soap films and soap bubbles*, Dover Publications, Inc., New York, 1992.

[2] R. Osserman (1978). *The isoperimetric inequality*, Bulletin of the American Mathematical Society, **84**(6), 1182-1238.

[3] J. Pérez (2017). *Superficies mínimas y de curvatura media constante en* $\mathbb{R}^3$, `http://wpd.ugr.es/~jperez/wordpress/wp-content/uploads/todo.pdf` (Notas). Consultado por última vez: setembro 2017.