Actas do Seminario de Iniciación
Á Investigación - ISSN: 2171-6536

Métricas trapalleiras en $\mathbb{R}^3$

Área de Xeometría e Topoloxía

Alberto Rodríguez Vázquez

Universidade de Santiago de Compostela

18 de setembro de 2019

Xeometría de Riemann

A xeometría de Riemann constitúe unha das ramas máis importantes da xeometría diferencial. É común sinalar como feito fundacional da mesma, a lección inaugural pronunciada por Bernhard Riemann en 1854, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* [6]. Esta contribuíu ó avance de diversas áreas das matemáticas como a teoría de grupos, a ánalise e a topoloxía alxébrica e diferencial. Alén das matemáticas, a xeometría de Riemann é coñecida por ser o marco matemático sobre o que se construíu a teoría da relatividade de Einstein.

Para unha visión global sobre os temas tratados e problemas abertos no eido da xeometría de Riemann, pódese consultar [2]. Para unha introdución máis detallada pódese consultar [3].

A xeometría de Riemann consiste en considerar un espazo, M, e introducir nel un obxecto coñecido como métrica de Riemann que denotamos por g.

Este espazo M é unha variedade diferenciable, concepto que definiremos a continuación. Unha variedade topolóxica é un espazo topolóxico Haudorff, localmente euclideano e cunha base numerable. Unha **variedade diferenciable** defínese como unha variedade topolóxica dotada dun atlas diferenciable [3]. Ademais, é posible definir para cada $p \in M$ un espazo vectorial que chamamos **espazo tanxente** e denotamos por T_pM. Un exemplo sinxelo de variedade diferenciable é $\mathbb{R}^3$, que satisfai $T_p\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ para cada $p \in \mathbb{R}^3$. A meirande parte destas liñas van xirar ó redor deste espazo. Polo tanto, o lector que non estea familiarizado coa noción de variedade diferenciable pode supoñer sen ningún temor que $M = \mathbb{R}^3$.

Doutra banda, unha **métrica de Riemann**, g, en M é un produto escalar, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, en T_pM que depende diferenciablemente de $p \in M$. Volvendo ó caso $M = \mathbb{R}^3$, é doado ver que podemos identificar todo produto escalar de $\mathbb{R}^3$ cunha matriz de orde 3, simétrica e definida positiva. Polo tanto, unha métrica de Riemann en $\mathbb{R}^3$ pode identificarse cunha matriz de orde 3, simétrica e definida positiva cuxas entradas son funcións diferenciables de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$.

A continuación, explicaremos algunhas das cousas que podemos facer cando contamos cunha métrica de Riemann.

Palabras Clave: superficies con curvaturas principais constantes; superficies isoparamétricas; xeometría de Riemann.

Sexa $\gamma\colon [a,b] \to M$ unha curva definida en M. A lonxitude desta curva vén dada pola seguinte fórmula

$$L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle} dt, \tag{1}$$

onde $\dot{\gamma}(t)$ denota a derivada de $\gamma(t)$ con respecto a t. Co cal, é natural introducir unha distancia en M definida do seguinte xeito. Dados $p, q \in M$, denotamos por $L(p,q)$ o conxunto de camiños (aplicacións, $\gamma\colon [0,1] \to M$, diferenciables con extremos p e q). Definimos a distancia:

$$d(p,q) := \inf_{\gamma \in L(p,q)} \{L(\gamma)\}.$$

Denotemos por $\mathcal{F}(M)$ e $\mathfrak{X}(M)$ o conxunto das funcións diferenciables de M en $\mathbb{R}$ e o conxunto dos campos de vectores en M, respectivamente. Unha **conexión afín** é unha aplicación $\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ que é $\mathbb{R}$-linear na segunda compoñente e $\mathcal{F}(M)$-linear na primeira. Ademais, diremos que unha conexión afín é unha **conexión de Levi-Civita** se satisfai:

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$
$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle,$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $[\cdot,\cdot]$ denota o corchete de Lie de campos de vectores.

Dada unha métrica de Riemann, g, existe unha única conexión de Levi-Civita que proporciona un xeito natural de tomar derivadas direccionais en M. Deste xeito, $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ interprétase como "a derivada de Y na dirección de X".

Tendo en conta o anterior, podemos definir as **xeodésicas** como aquelas curvas $\gamma\colon [a,b] \to M$ que satisfan $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$. Escribindo esta ecuación en coordenadas obtense un sistema de ecuacións diferenciais ordinarias de segunda orde. Entón, empregando resultados de existencia e unicidade de solucións de ecuacións diferenciais, podemos concluír que, fixados $p \in M$ e $v \in T_pM$, existe unha única xeodésica γ con condicións iniciais $\gamma(0) = p \in M$ e $\dot{\gamma}(0) = v \in T_pM$.

Para rematar esta sección, describiremos como son as xeodésicas do espazo euclidiano e do espazo hiperbólico de dimensión tres. Sexa $\mathbb{E}^3$ o espazo euclidiano tridimensional. Isto é, $\mathbb{R}^3$ dotado coa métrica de Riemann que se corresponde coa matriz identidade en cada punto. As xeodésicas desta variedade de Riemann son as rectas. Outro exemplo de variedade de Riemann vén dado polo espazo hiperbólico tridimensional. Consideremos $\mathbb{R}^2 \times (0, +\infty)$, o semiespazo superior delimitado polo plano $z = 0$ en $\mathbb{R}^3$, e a métrica de Riemann, g, con entradas

$$g_{ij}(x,y,z) = \frac{1}{z^2}\delta_{ij}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty),$$

onde δ_{ij} denota a delta de Kronecker. Entón, o espazo hiperbólico tridimensional $\mathbb{R}H^3$ pódese definir como $\mathbb{R}^2 \times (0, +\infty)$ equipado coa métrica anteriormente descrita. As xeodésicas deste espazo son as rectas ortogonais ó plano $z = 0$ e as semicircunferencias con centro nalgún punto dese plano.

Superficies en $(\mathbb{R}^3, g)$

A continuación introduciremos algunhas definicións sobre superficies no espazo euclideano tridimensional dotado dunha métrica arbitraria, $(\mathbb{R}^3, g)$. Consideremos S unha superficie en $(\mathbb{R}^3, g)$. Denotemos por T_pS o espazo tanxente a S en $p \in S$. Este é un subespazo vectorial de dimensión dous en $\mathbb{R}^3$. Empregando a métrica de Riemann, g, podemos definir o complemento ortogonal a T_pS en S, o que nos permite definir un **vector normal unitario** en p, que denotamos por $N(p)$. Ademais, podemos definir o **operador de configuración** asociado a S mediante $A_p \colon T_pS \to T_pS$, definido como

$$A_p(v) = -\nabla_v N_{|p}, \quad v \in T_pS.$$

Este é un endomorfismo lineal autoadxunto respecto da restricción de g a T_pS. Co cal, polo teorema espectral, os autovalores do operador de configuración son funcións reais definidas en S, que chamaremos **curvaturas principais**. Polo tanto, ten sentido definir a **curvatura media** de S mediante $H \colon S \to \mathbb{R}$, onde $H(p) = \mathrm{tr} A_p$ para cada $p \in S$. Consecuentemente, estamos en condicións de introducir as dúas definicións máis importantes neste texto.

Definición 1. *Sexa $S \subset (\mathbb{R}^3, g)$ unha superficie. Diremos que S ten **curvaturas principais constantes** se os autovalores de A_p e A_q coinciden para todo $p, q \in S$.*

É doado comprobar que o plano, a esfera ou o cilindro son superficies con curvaturas principais constantes en $\mathbb{E}^3$. De feito, o recíproco tamén é certo.

Teorema 1 (Levi–Civita, [5])**.** *Sexa $S \subset \mathbb{E}^3$ unha superficie. Entón os seguintes enunciados son equivalentes:*

1. *S ten curvaturas principais constantes.*
2. *S é un subconxunto aberto dun plano, unha esfera ou un cilindro.*

Definimos a aplicación exponencial de Riemann de $(\mathbb{R}^3, g)$ en $p \in \mathbb{R}^3$, denotada por $\exp_p \colon T_p\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, e dada por $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$ para $v \in T_p\mathbb{R}^3$, onde γ_v é a xeodésica con condicións iniciais $p \in \mathbb{R}^3$ e $v \in T_p\mathbb{R}^3$. Agora diremos que

$$S^r := \{\exp_p rN(p) : p \in S\}$$

é a **superficie paralela a distancia** $r > 0$. Por ser a aplicación exponencial de Riemann un difeomorfismo local, tense que S^r é difeomorfa a S para $r > 0$ suficientemente pequeno.

Definición 2. *Sexa $S \subset (\mathbb{R}^3, g)$ unha superficie. Diremos que S é **isoparamétrica** se tanto S como as superficies paralelas próximas a S teñen curvatura media constante.*

De novo, é sinxelo comprobar que o plano, a esfera ou o cilindro son superficies isoparamétricas en $\mathbb{E}^3$. Ademais, temos a seguinte relación entre superficies con curvaturas principais constantes e superficies isoparamétricas nos chamados espazos de curvatura constante. Estes son: o espazo euclidiano $\mathbb{E}^3$, o espazo hiperbólico $\mathbb{R}H^3$ e a esfera redonda $\mathbb{S}^3$, que non é máis que o conxunto de vectores unitarios de $\mathbb{E}^4$ dotado da métrica inducida.

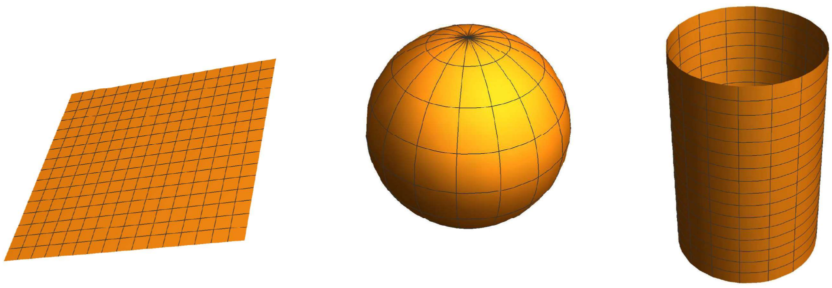

Figura 1: As superficies isoparamétricas en $\mathbb{E}^3$ son o plano, a esfera e o cilindro.

Teorema 2 (Élie Cartan, [2])**.** *Sexa S unha superficie en $\mathbb{E}^3, \mathbb{R}H^3$ ou $\mathbb{S}^3$. Entón, equivalen:*

- *S ten curvaturas principais constantes.*
- *S é isoparamétrica.*

Métricas trapalleiras

Á vista do Teorema 2, pódese pensar que ter curvaturas principais constantes e ser isoparamétrica son conceptos equivalentes en calquera variedade de Riemann. Porén, Wang [8], probou que existen variedades de Riemann que admiten superficies isoparamétricas con curvaturas principais non constantes. Sen embargo, non se coñecían exemplos de superficies con curvaturas principais constantes que non fosen isoparamétricas. É dicir, que a xeometría das superficies paralelas a unha superficie con curvaturas principais constantes fose estragada pola métrica da variedade ambiente. Isto motiva a seguinte definición.

Definición 3. *Sexa g unha métrica de Riemann en $\mathbb{R}^3$. Diremos que g é **trapalleira** se existe algunha superficie $S \subset (\mathbb{R}^3, g)$ non isoparamétrica e con curvaturas principais constantes.*

A continuación, describiremos brevemente un exemplo de métrica trapalleira en $\mathbb{R}^3$ obtido en [7]. Por unha banda, consideremos a métrica g en $\mathbb{R}^3$ con entradas

$$g_{ij}(x, y, z) = (2 + \cos(\pi x))(2 + \cos(\pi y))\delta_{ij}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ e } i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Por outra banda, consideremos a superficie $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$, é dicir, o plano $z = 0$. Reparando no feito de que g non depende da coordenada z, é fácil comprobar que o operador de configuración de S é a matriz nula en cada punto. Polo tanto, a superficie S ten curvaturas principais constantes. Sexa $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^2$. Entón, pódese probar que a traza de $\gamma_\alpha(t) = (\alpha_1, \alpha_2, t)$ é unha xeodésica ortogonal a S.

Empregando a ecuación de Riccati, coñecida no eido da xeometría de Riemann (ver [3, Ecuación 3.8]), obtemos

$$\frac{d}{dr}_{|r=0} H^r(\gamma_\alpha(r)) = \pi^2(2 - 4/3(\#\,\text{entradas pares de } \alpha)),$$

onde H^r denota a curvatura media de S^r, a superficie paralela a S a distancia $r > 0$.

Polo tanto, tendo en conta que $H^0 = H = 0$, escollendo $\alpha = (0, 0)$ e $\beta = (1, 1)$ obtemos que $H^r(\gamma_\alpha(r)) < 0$ e $H^r(\gamma_\beta(r)) > 0$. Co cal S^r non ten curvatura media constante para $r > 0$ pequeno. Entón, S non é isoparamétrica e g é unha métrica trapalleira.

Bibliografía

[1] Berger, M. (2003). *A panoramic view of Riemannian geometry*, Springer-Verlag, Berlin.

[2] Cartan, E. (1938). *Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante*, Ann. Mat. Pura Appl., **17**, pp. 177–191.

[3] Gray, A. (2004). *Tubes*, Birkhäuser Basel, Boston.

[4] Lee, J. M. (1997). *Riemannian geometry. An introduction to curvature*, Springer-Verlag, New York.

[5] Levi-Civita, T. (1937). *Famiglie di superficie isoparametriche nell'ordinario spazio euclideo*, Att. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **26**(6), pp. 355–362.

[6] Riemann, B. (2013). *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Historisch und mathematisch kommentiert von Jürgen Jost*, Springer Spektrum, Berlin.

[7] Rodríguez-Vázquez, A. (2019). *A non isoparametric hypersurface with constant principal curvatures*, Proc. Amer. Math. Soc., **147**, pp. 5417–5420.

[8] Wang, Q. M. (1983). *Real hypersurfaces with constant principal curvatures in complex projective spaces. I.*, Sci. Sinica Ser. A., **26**, pp. 1017–1024.