

**ACTAS DO SEMINARIO**

**DE**

**INICIACIÓN Á INVESTIGACIÓN**

**CURSO 2021 – 2022**

**Editores:**

María Alonso Pena

Beatriz Álvarez Díaz

Érika Diz Pita

Tomás Otero Casal

Alberto Rodríguez Vázquez



© 2022 Seminario de Iniciación á Investigación.  
Centro de Investigación e Tecnoloxía Matemática de Galicia (CITMAga)

**Coordina:**

Seminario de Iniciación á Investigación (SII)  
*sii@citmaga.gal*

**Edita:**

Centro de Investigación e Tecnoloxía Matemática de Galicia (CITMAga)

**Imprime:**

Imprenta Universitaria  
Pavillón de Servizos s/n  
Campus Vida  
15782 Santiago de Compostela  
A Coruña

**ISSN:** 2171 - 6536

**Depósito Legal:** C 1734-2022



*I like crossing the imaginary boundaries people set up between different fields.*

Maryam Mirzakhani (1977 – 2017)



# Prefacio

Hai xa uns cantos anos dende que, sendo eu alumno de primeiro curso, certo profesor da Facultade de Matemáticas, inelutablemente da área de Álgebra, espetara durante unha clase a frase: “todo é un conxunto”. Hoxe, pensando no SII mentres tecleo estas liñas, non podoo senón darlle a razón. E é que o SII só se entende a través do conxunto dinámico de persoas que o foron conformando ao longo da súa existencia: como comité organizador, como relatoras, como público... Querería, entón, adicar este prefacio a anatomizar o SII a partir da fotografía temporal que eu tiven o privilexio de contemplar e integrar; iso si, dando antes tanto un fondo agradecemento a todas esas persoas que nos entregaron un proxecto cunha saúde magnífica, coma deixando os mellores desexos de azos para toda a xentiña que vén.

Di un proverbio etíope que “cando as arañas tecen xuntas, poden atar un león”. Nun planeta onde as maiores calamidades son, maiormente, o froito de ignorar o sufrimento de a quen non se lle pon rostro, resulta claro que os grandes leóns do mundo real son cazados tecendo fíos de solidariedade: relacionarnos cos demais fainos mellores e máis tolerantes, aprender da veciña fainos máis sabias e interesarnos pola realidade allea muda o mundo, aínda que sexa infinitesimalmente, na dirección boal.

Para min, falar do SII supón falar dun xerme deses fíos. Supón tamén falar sobre un proxecto desinteresado que é ilusión pura e, simultaneamente, supón falar de tantas persoas que estimo, quero e admiro moito. O SII supón interesarse polo que fan os demais e supón interesarse polos demais. Supón lembrar moreas de charlas matematicamente interesantes cheas de desenfado, charabiscas, memes, sorrisos cómplices... que dan boa proba da atmosfera alegre que, cada dúas semanas, envolvía a aula en cuestión por media hora (sen contar a prórroga, case obrigada, na cafetaría).

O SII, polo tanto, que nacera coma un proxecto para coñecer “as matemáticas da veciña”, acabou por ser a compoñente científica de algo moito máis grande. A día de hoxe, o SII é un corolario natural do bo ambiente entre a xente moza da Facultade, das súas relacións saudables e das ganas de saber en que problema ou teoría cavila quen senta ao teu carón nunha cea da comisión de festas. Persoalmente, este ambiente agradable do día a día, e case festivo, faime sentir moi ledoo. Nun mundo coma o universitario, onde os chanzos iniciais da carreira investigadora son tan competitivos, están tan precarizados e resultan certamente estresantes, fomos quen de construír un oasis fraternal de apoio mutuo e alegrías, sustentado na interacción mutua en actividades coma o SII. Por comparativa co que viviron outros colegas

noutras ramas ou universidades, cónstame que o que temos é algo infrecuente, moi precioso e que espero que arrastremos por sempre, contaxiando a quen veña! Por todo o anterior, éme imposible non emocionarme nin sentir unha honra inmensa á hora de poder redactar este prefacio. Grazas a todas as que, dende o inicio da andaina deste seminario, collestes as matemáticas do veciño para ilas transformando, paulatinamente, nas matemáticas da familia. Parabéns, de corazón!

Santiago de Compostela, outubro de 2022

Daniel Cao Labora





# Índice xeral

<b>Tomás Otero Casal</b> “A cana de pescar do topólogo”	<b>3</b>
<b>Diego Bolón Rodríguez</b> “Verosimilitude e tests de multimodalidade”	<b>9</b>
<b>Brais Ramos Pérez</b> “Álgebras de Hopf. Ecuación Cuántica de Yang-Baxter”	<b>15</b>
<b>Sabina Pelerino Rodés</b> “Regresión Logística Multinomial: aplicación en un caso social”	<b>21</b>
<b>José Luis Carmona Jiménez</b> “Teselaciones y espacios homogéneos”	<b>27</b>
<b>Mariña Canabal Juanatey</b> “Falando de todo un pouco”	<b>33</b>
<b>Miguel Picos Maiztegui</b> “Método de cuadratura de convolución”	<b>39</b>
<b>Saúl Estévez Cuntín</b> “¿Qué son los esquemas?”	<b>45</b>
<b>Filipe Soares</b> “Técnicas de optimización para o deseño de instrumentos musicais”	<b>51</b>
<b>Sara Rodríguez Pastoriza</b> “Ecuacións en modelos biolóxicos”	<b>57</b>
<b>Andrés Pérez Rodríguez</b> “Álxebras de Evolución e Grafos”	<b>63</b>
<b>Sergio Herrero Vila</b> “Particularidades de la geometría en curvatura negativa”	<b>69</b>
<b>Iria Rodríguez Acevedo</b> “Anillos neuronales”	<b>75</b>
<b>Mouhcine Yousfi</b> “Transformada de Fourier y Laplace y sus aplicaciones a EDPs”	<b>81</b>

<b>Ignacio Gómez Casares</b>	
“¿Puede ayudar la estadística a la optimización?”	<b>87</b>
<b>Unha xornada de divulgación.</b>	
“Matemáticas: habelas hainas, seguimos contándochas! 2021”	<b>91</b>
<b>Agradecementos</b>	<b>95</b>

# Introdución

Ao comezo da etapa de doutoramento, o estudiantado trata de somerxerse no mundo da investigación aprendendo a realizar distintas tarefas que poden culminar, tras moito esforzo, na elaboración dun traballo científico rigoroso. Porén, de nada serven as moitas horas empregadas no curso da nosa investigación, se non somos capaces de transmitir os avances dos nosos proxectos a distintas audiencias, tanto aquelas expertas na temática como outras con formacións máis diversas. Ser capaces de sintetizar o contido das nosas investigacións e expoñelo de forma clara, amena e breve a un público non familiarizado coa nosa especialidade é, sen dúbida, unha das máis importantes competencias a acadar dentro da etapa de doutoramento. Do mesmo modo, ter a posibilidade de escoitar os avances dos nosos compañeiros pode resultar enriquecedor para as nosas carreiras, aprendendo dos seus acertos e fallos e recompilando ideas para os nosos propios traballos. Moitas veces, e en especial co auxe das novas tecnoloxías, pedimos axuda ou consello a expertos que se atopan a miles de quilómetros de nós, cando é posible que a compañeira da mesa do lado teña a resposta, ferramenta ou idea que estabamos buscando.

Estes obxectivos (facilitar a práctica de fala en público, transmitir coñecementos a distintas audiencias e coñecer e participar activamente nos avances dos nosos compañeiros) son os que motivan a organización do Seminario de Iniciación á Investigación ano tras ano. Foi no 2005 cando se deu comezo a este proxecto levado a cabo por un grupo de alumnos de Terceiro Ciclo da Facultade de Matemáticas, que estaba encadrado dentro do Instituto de Matemáticas ata a súa desaparición neste 2021, e vai agora da man do recentemente creado Centro de Investigación e Tecnoloxía Matemática de Galicia (CITMAga).

Neste curso impartíronse 15 seminarios abordando todas as áreas das matemáticas, con poñentes procedentes da Universidade de Santiago de Compostela, pero tamén relatores con distintas afiliacións: compañeiros cos que compartimos estreitos lazos e que lle deron ao SII un carácter transversal e ata internacional. Ao igual que no curso anterior, foi posible seguir todas as comunicacións presencialmente e tamén en liña dende calquera parte do mundo, destacando a asistencia internacional no SII en case todos os relatorios. Estas sesións quincenais complementáronse coa xornada de divulgación “Matemáticas: habelas hainas, seguimos contándochas! 2021”. Ambas actividades supuxeron a creación de puntos de reunión, convivencia, afloramento de ideas e debate dentro da Facultade de Matemáticas, que ademais desfrutaron dun carácter lúdico xa que, non o podemos esquecer, as matemáticas

tamén poden ir da man da diversión.

Neste volume presentamos os resumos das charlas que tiveron lugar durante o curso 2021-2022. O comité organizador do SII, formado por cinco estudantes de Terceiro Ciclo, encárgase, ademais da planificación, organización e difusión dos distintos seminarios, da redacción destas actas que reflexan o esforzo dos membros do comité e de todos os relatores.

Rematamos deixándolle paso a un novo comité organizador, desexando que siga avivando o espírito do SII, incentivando ás novas xeracións a compartir coñecemento e a disfrutar facéndoo.

## A cana de pescar do topólogo

Área de Xeometría e Topoloxía

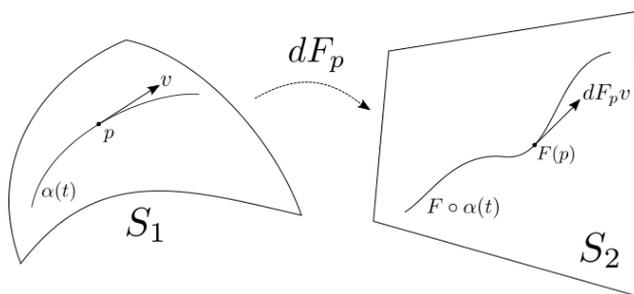
Tomás Otero Casal

Universidade de Santiago de Compostela - CITMaga

22 de setembro de 2021

### O problema de derivar campos de vectores

En xeometría, o concepto de diferencial dunha función é das primeiras cousas que estudamos: Se consideramos unha aplicación diferenciable  $F: S_1 \rightarrow S_2$  entre dúas superficies regulares de  $\mathbb{R}^3$ , a súa *diferencial* nun punto  $p \in S_1$  é a aplicación que leva un vector tanxente a  $S_1$  en  $p$  (que podemos representar como a derivada de certa curva  $\alpha(t) \subseteq S_1$  en  $t = 0$ ) en  $(F \circ \alpha)'(0)$ , que é un vector tanxente a  $S_2$  en  $F(p)$ .



Diferencial dunha aplicación entre superficies.

Cando un quere derivar campos de vectores, a cousa complicase: Se calculamos a derivada usual dun campo de vectores  $V$  tanxente a unha superficie ao longo dunha curva  $\alpha$ , este non resulta un campo de vectores tanxente á superficie ao longo de  $\alpha$ . Para solucionar que a derivada escape do espazo tanxente á superficie en cada punto, definimos a *derivada covariante* de  $V$  en  $t$  como  $D_t V = (V \circ \alpha)'(t)^\top$ .

Esta definición baséase en que as superficies regulares “viven” en  $\mathbb{R}^3$ . Non obstante, cando queremos traballar con obxectos xeométricos máis xerais, isto presenta problemas. Poñamos que queremos facer xeometría na botella de Klein, que é un exemplo de *variedade diferenciable* (espazos topolóxicos localmente euclidianos cuxas parametrizacións, ao igual que nas superficies, satisfán certas condicións de compatibilidade). É coñecido que non podemos meter este espazo en  $\mathbb{R}^3$  sen que teña autointerseccións, polo que o seu espazo tanxente nun punto  $p$  deixa de ser un subespazo de  $\mathbb{R}^3$  para convertirse nun espazo vectorial 2-dimensional abstracto

asociado ao punto  $p$ , co que a definición anterior de derivada covariante non nos serve.

Temos dúas maneiras principais de solucionar este contratempo: A primeira delas consiste en preguntarse se podemos meter a nosa variedade nun  $\mathbb{R}^N$  con  $N$  suficientemente grande e definir a derivada covariante de xeito análogo ao caso de superficies regulares. O seguinte resultado dinos que é posible definir unha derivada deste xeito:

**Teorema 1** (do embebecemento de Whitney). *Toda variedade diferenciable  $n$ -dimensional admite un embebecemento en  $\mathbb{R}^{2n}$ .*

Hai que destacar que esta maneira de meter a variedade nun espazo euclidiano non é única (de feito, é equivalente a fixar unha maneira de medir vectores tanxentes), e as diferentes maneiras de facelo cambian o xeito no que derivamos campos de vectores, co que para saber derivar nos vemos obrigados a escoller unha destas, introducindo estrutura adicional. Isto dá pé ao concepto de conexión nunha variedade (unha introdución a este concepto pódese ver en [1]).

A segunda opción é buscar unha maneira *intrínseca* (é dicir, que non precise de máis información que a da propia variedade) de derivar campos: A isto é ao que dá resposta a derivada de Lie, que mide como cambia un campo de vectores  $X$  na dirección doutro campo de vectores  $Y$ , e que introduciremos a continuación para o caso particular de superficies regulares (aínda que os conceptos seguen a ser válidos para variedades diferenciables).

## Curvas integrais e fluxos

Se como dicíamos antes nos esquecemos de que o espazo tanxente a unha superficie nun punto  $p$  é un subespazo de  $\mathbb{R}^3$ , para construír unha derivada vai ser necesario comparar vectores tanxentes en distintos puntos (e polo tanto en distintos espazos vectoriais). Para isto usaremos o fluxo dun campo de vectores, que nos da unha idea de como movernos ao longo da superficie, partindo nun punto na dirección do campo.

**Definición 1.** *Sexa  $X$  un campo de vectores tanxentes a unha superficie  $S$ . Unha **curva integral** de  $X$  é unha curva  $\gamma: I \rightarrow S$  tal que  $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$  para todo  $t \in I$ , onde  $I$  é un intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ .*

Sen perda de xeneralidade, podemos supoñer que  $0 \in I$ . Neste caso, o punto  $\gamma(0) \in S$  dise o punto inicial da curva integral  $\gamma$ . Fixado un punto inicial  $p$ , atopar curvas integrais para un campo de vectores é equivalente a resolver un problema de valor inicial para a súa lectura en coordenadas, como pon de relevo o seguinte exemplo:

**Exemplo 1.** *Consideramos o campo de vectores  $V_{(x,y)} = (-y, x)$  en  $\mathbb{R}^2$ . Buscamos atopar unha curva inicial  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  de  $X$  tal que  $\gamma(0) = (a, b)$  para certo*

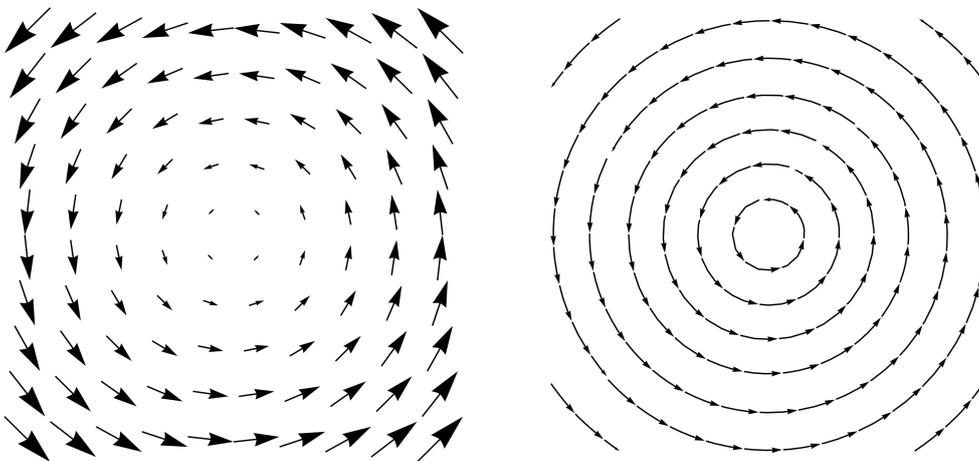
punto  $(a, b)$ . A condición  $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$  é equivalente a resolver sistema de ecuacións diferenciais

$$\begin{aligned}x'(t) &= -y(t), \\y'(t) &= x(t),\end{aligned}$$

con condicións iniciais  $x(0) = a$ ,  $y(0) = b$ . Polo tanto, as curvas integrais de  $V$  son da forma  $\gamma(t) = (a \cos(t) - b \operatorname{sen}(t), a \operatorname{sen}(t) + b \cos(t))$ .

Supoñamos agora que, coma no exemplo anterior, para calquera punto  $p$  da nosa superficie  $S$  as curvas integrais están definidas en todo  $\mathbb{R}$ . Podemos entón definir unha aplicación  $\Theta_t: S \rightarrow S$  mediante  $\Theta_t(p) = \Theta(t, p)$ , onde  $\Theta(-, p)$  é a curva integral de  $X$  con punto inicial  $p$ .  $\Theta_t$  corresponde a “mover” a superficie ao longo das curvas integrais de  $X$  ata tempo  $t$ . A aplicación  $\Theta_t$  así definida satisfai  $\Theta_t \circ \Theta_s = \Theta_{t+s}$  e  $\Theta_0 = \operatorname{Id}_S$ . Motivados por isto, dicimos que un *fluxo global* en  $S$  é unha aplicación  $\Theta: \mathbb{R} \times S \rightarrow S$  cumprindo:

- (i)  $\Theta(t, \Theta(s, p)) = \Theta(t + s, p)$  para todo  $t, s \in \mathbb{R}$  e  $p \in S$ ,
- (ii)  $\Theta(0, p) = p$  para todo  $p \in S$ .



O campo de vectores no Exemplo 1 e o seu fluxo.

Dado un fluxo global  $\Theta$  nunha superficie  $S$ , defínese o seu *xerador infinitesimal* como o campo de vectores tanxentes  $V_p = \frac{d}{dt}\Theta_t(p)|_{t=0}$ , e tense que  $\Theta_t(p)$  é unha curva integral de  $V$  con punto inicial  $p$ . Deste xeito, a cada fluxo global podémoslle asociar un campo de vectores diferenciable. O recíproco non é certo, como ilustramos a continuación: Hai campos de vectores que non son xeradores infinitesimais dun fluxo global.

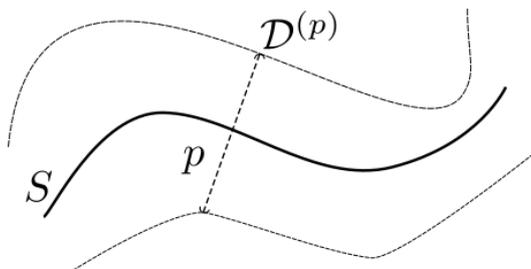
**Exemplo 2.** Consideramos o campo de vectores  $V_{(x,y)} = (x^2, 0)$  en  $\mathbb{R}^2$ . Atopar a curva integral de  $V$  con punto inicial  $p = (1, 0)$  é equivalente a resolver o problema de valor inicial

$$\begin{aligned}x'(t) &= x^2(t), \\y'(t) &= 0, \\x(0) &= 1, \\y(0) &= 0,\end{aligned}$$

cuxa solución é  $\gamma(t) = (\frac{1}{1-t}, 0)$ , que só está definida para  $t < 1$ .

Por isto é necesario que os fluxos non teñan por que estar definidos en todo  $\mathbb{R}$  para poder ter unha correspondencia entre fluxos e campos de vectores.

**Definición 2.** Un **dominio de fluxo** é un aberto  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times S$  tal que para cada punto  $p$  o conxunto  $\mathcal{D}^{(p)} = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in \mathcal{D}\} \subseteq \mathbb{R}$  é un intervalo contendo 0.



Unha sección dun dominio de fluxo.

Un **fluxo** (local) en  $S$  é unha aplicación  $\Theta: \mathcal{D} \rightarrow S$  tal que para calquera  $p \in S$ ,

(i) Se  $s \in \mathcal{D}^{(p)}$ ,  $t \in \mathcal{D}^{(\Theta(s,p))}$ , e  $s + p \in \mathcal{D}^{(p)}$ , entón  $\Theta(t, \Theta(s, p)) = \Theta(t + s, p)$ .

(ii)  $\Theta(0, p) = p$  para todo  $p \in S$ .

Un fluxo dize **maximal** se non se pode estender a un dominio de fluxo máis grande. Unha curva integral é **maximal** se non se pode estender a un intervalo máis grande.

Ao igual que antes, o xerador infinitesimal dun fluxo resulta ser un campo de vectores tanxente sobre  $S$ , e cada  $\Theta_t(p)$  é unha curva integral de  $V$  con punto inicial  $p$ . Isto permite establecer unha bixección entre fluxos maximais e campos de vectores tanxentes sobre unha superficie:

**Teorema 2** (Teorema fundamental do fluxo). Sexa  $V$  un campo de vectores tanxentes diferenciable nunha superficie  $S$ . Entón, existe un único fluxo maximal  $\Theta: \mathcal{D} \rightarrow S$  con xerador infinitesimal  $V$ . Ademais  $\Theta$  cumpre:

(i) Para cada punto  $p$ , a curva integral maximal de  $V$  con punto inicial  $p$  é  $\Theta(t, p)$ , onde  $t \in \mathcal{D}^{(p)}$ .

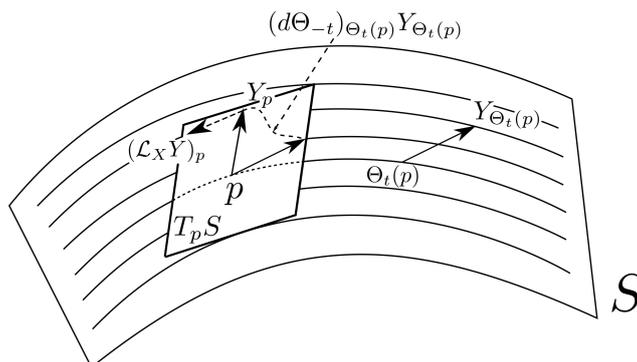
(ii) Se  $s \in \mathcal{D}^{(p)}$ , entón  $\mathcal{D}^{(\Theta(p,s))} = \mathcal{D}^{(p)} - s = \{t - s | t \in \mathcal{D}^{(p)}\}$ .

(iii) Sexa  $M_t = \{p \in S | t \in \mathcal{D}^{(p)}\} = \{p \in S | (p, s) \in \mathcal{D}\}$ . Entón,  $\Theta_t: M_t \rightarrow M_{-t}$  é un difeomorfismo con inversa  $\Theta_{-t}$ .

$\Theta$  dise o **fluxo xerado por  $V$**  ou o **fluxo de  $V$** .

## A derivada de Lie

O fluxo danos unha ferramenta para comparar vectores tanxentes en distintos puntos dunha mesma curva integral dun campo de vectores: Séguese do apartado (iii) no Teorema 2 que se  $\Theta_t(p)$  é un punto da curva integral dun campo de vectores  $X$  con punto inicial  $p$ , entón  $d(\Theta_{-t})_{\Theta_t(p)}: T_{\Theta_t(p)}S \rightarrow T_pS$  é un isomorfismo linear. Como as curvas integrais de  $X$  están definidas nun intervalo contendo 0 o suficientemente pequeno, dado outro campo de vectores  $Y$  en  $S$ , podemos considerar unha nova curva en  $T_pS$  definida, por  $d(\Theta_{-t})_{\Theta_t(p)}(Y_{\Theta_t(p)})$  (isto é, levar a  $T_pS$  o vector  $Y_{\Theta_t(p)}$  a través do fluxo). A derivada desta curva en  $T_pS$  para  $t = 0$  é o que se coñece como a derivada de Lie de  $Y$  con respecto de  $X$  no punto  $p$ .



Derivada de Lie dun campo de vectores

**Definición 3.** Sexan  $X$  e  $Y$  dous campos de vectores diferenciables tanxentes a unha superficie  $S$ . Defínese a **derivada de Lie** de  $Y$  con respecto a  $X$  nun punto  $p$  como

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\Theta_{-t})_{\Theta_t(p)}(Y_{\Theta_t(p)}) - Y_p}{t},$$

onde  $\Theta$  denota o fluxo de  $X$ .

**Exemplo 3.** Consideramos os campos  $X_{(x,y)} = (-y, x)$  e  $Y_{(x,y)} = (x^2, 0)$  en  $\mathbb{R}^2$ . Para calcular  $\mathcal{L}_X Y$ , o primeiro que debemos facer é obter o fluxo de  $X$ . Como xa calculamos no Exemplo 1,

$$\Theta_t(a, b) = (a \cos(t) - b \sin(t), a \sin(t) + b \cos(t)).$$

Agora,

$$Y_{\Theta_t(a,b)} = (a^2 \cos^2(t) - 2ab \cos(t) \operatorname{sen}(t) + b^2 \operatorname{sen}^2(t), 0),$$

polo que

$$\begin{aligned} d(\Theta_{-t})_{\Theta_t(a,b)} Y_{\Theta_t(a,b)} &= \begin{pmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix} Y_{\Theta_t(a,b)} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 \cos^3(t) - 2ab \cos^2(t) \operatorname{sen}(t) + b^2 \cos(t) \operatorname{sen}^2(t) \\ -a^2 \cos^2(t) \operatorname{sen}(t) + 2ab \cos(t) \operatorname{sen}^2(t) - b^2 \operatorname{sen}^3(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Derivando en  $t = 0$ , obtemos

$$(\mathcal{L}_X Y)_{(a,b)} = (-2ab, -a^2).$$

A derivada de Lie de dous campos de vectores diferenciables sobre unha superficie  $S$  resulta ser un novo campo de vectores diferenciable sobre  $S$ . Ademais, de xeito similar á derivada usual de  $\mathbb{R}^n$ , a derivada de Lie satisfai a seguinte regra da cadea:

$$\mathcal{L}_X(fY) = (Xf)Y + f\mathcal{L}_X Y, \quad \text{para toda función diferenciable } f: S \rightarrow \mathbb{R},$$

onde  $(Xf)_p = df_p X_p$ . Ademais, a derivada de Lie cumpre a condición de ser linear en ambas compoñentes.

Outra das propiedades importantes da derivada de Lie é que é antisimétrica, é dicir,  $\mathcal{L}_X Y = -\mathcal{L}_Y X$ . Isto débese a que o vector que mide o cambio do campo  $Y$  na dirección de  $X$  nun punto dado é o vector oposto ao que mide o cambio de  $X$  na dirección de  $Y$ .

Por último, cabe destacar que a derivada de Lie é invariante por difeomorfismos. É dicir, se  $F: S_1 \rightarrow S_2$  é un difeomorfismo entre dúas superficies,  $dF(\mathcal{L}_X Y) = \mathcal{L}_{dF(X)}(dF(Y))$ . Polo tanto, superficies difeomorfas teñen a mesma derivada de Lie, o que fai da derivada de Lie unha ferramenta natural para utilizar en xeometría.

## Bibliografía

- [1] Ferreiro Subrido, M. (2021). *Conectando espazos tanxentes*, Actas do Seminario de Iniciación á Investigación, Santiago de Compostela, Curso 2020-2021, pp. 3–7.
- [2] Hernández Cifre, M.A. e Pastor González, J.A. (2010). *Un curso de Geometría Diferencial*, CSIC Press, Madrid.
- [3] Lee, J.M. (2013). *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, **218** Springer, New York.

## Verosimilitude e tests de multimodalidade

Área de Estatística e Investigación Operativa

Diego Bolón Rodríguez

Universidade de Santiago de Compostela

6 de outubro de 2021

### Introdución e motivación

Unha moda dunha variable aleatoria absolutamente continua  $X$  é un punto  $x_0$  onde a súa función de densidade, que denotaremos por  $f$ , ten un máximo local. O obxectivo principal desta charla é a obtención dun contraste estatístico para descubrir o verdadeiro número de modas dunha variable aleatoria  $X$ .

Para tratar de motivar a necesidade deste tipo de tests introduciremos os datos analizados por [1]. Esta base de datos contén distintas variables asociadas a 975 falecementos de aves por colisións contra aeroxeradores detectadas en 44 parques eólicos situados na parte nordeste dos Estados Unidos de América. Para cada paxaro falecido atopado rexístrase a distancia horizontal entre o cadáver e o aeroxerador máis próximo (medida en metros).

Entre outras cousas, en [1] buscan como optimizar os protocolos de busca de cadáveres nestes casos. Partindo da hipótese de que a distribución ten unha única moda moi próxima ao cero, o protocolo de busca óptimo sería un protocolo radial, fixando un radio arredor de cada aeroxerador e concentrando a busca dentro dese radio.

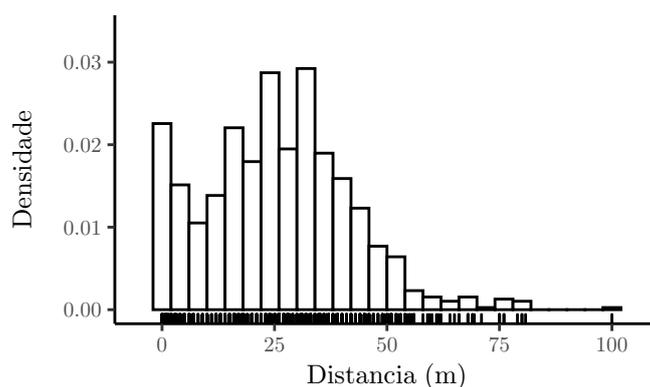


Figura 1: Histograma cos datos dos falecementos por colisións contra aeroxeradores (Choi et al., 2020).

PALABRAS CLAVE: modas; estimador tipo núcleo da densidade; xanela crítica; test; bootstrap.

Pero resulta que os datos obtidos non apoian esta hipótese. Na Figura 1 está representado o histograma das distancias obtidas, e como se pode observar, os datos parecen ter como mínimo dúas modas. Con todo, o histograma, como calquera método gráfico, depende fortemente do criterio de cada un. Isto é problemático, pois é posible que dúas persoas distintas cheguen a conclusións diferentes sobre o número de modas a partir dos mesmos datos. Habería que buscar, por tanto, un método sistemático e obxectivo para detectar o número de modas dunha distribución a partir dunha mostra aleatoria. Isto é, un contraste estatístico.

Por tanto, o noso obxectivo será a construción dun test de multimodalidade, é dicir, un contraste sobre o número de modas dunha poboación. Imos fixar notación para concretar o que queremos facer. Sexa  $X$  unha variable aleatoria absolutamente continua con  $j$  modas, onde  $j$  é un número natural descoñecido. Nós queremos construír un test estatístico que contraste as hipóteses

$$H_0 : j \leq k \text{ fronte a } H_1 : j > k; \quad (1)$$

onde  $k$  é un número natural coñecido e fixado de antemán.

## Test de razón de verosimilitudes

O novo test de multimodalidade vai estar baseado no test de razón de verosimilitudes da estatística paramétrica. O test de razón de verosimilitudes é unha familia de contrastes estatísticos que se empregan en inferencia paramétrica para contrastar a situación do parámetro descoñecido dentro espazo de parámetros.

Supoñamos que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  é unha mostra aleatoria simple dunha variable aleatoria absolutamente continua con función de densidade  $f$  pertencente a familia paramétrica  $\{f_\theta : \theta \in \Theta\}$ , onde  $\Theta \subset \mathbb{R}^m$ . Dividamos o espazo de parámetros en dous subconxuntos disxuntos,  $\Theta_0$  e  $\Theta_1$ , tales que  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$  e  $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ . O test de razón de verosimilitudes contrasta hipóteses da forma

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ fronte a } H_1 : \theta \in \Theta_1.$$

Para a construción do estatístico de contraste emprégase a función de verosimilitude  $\mathcal{L}$ , que é a función real positiva definida como

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^n f_\theta(X_i).$$

A idea detrás da verosimilitude é que  $\mathcal{L}(\theta_0)$  representa a factibilidade de que o valor do parámetro descoñecido sexa  $\theta_0$  unha vez observada a mostra. Así, dada unha mostra, que  $\mathcal{L}(\theta_0)$  sexa maior que  $\mathcal{L}(\theta_1)$  significa que é máis verosímil que o parámetro descoñecido  $\theta$  sexa igual a  $\theta_0$  que a  $\theta_1$  á vista dos datos observados. Entón, no caso de que a hipótese nula sexa certa, a función de verosimilitude debería tomar valores grandes dentro do conxunto  $\Theta_0$ , que é o que se corresponde a  $H_0$ .

Tendo en conta o anterior, no test de razón de verosimilitudes emprégase o estatístico

$$D = 2 \left[ \sup_{\theta \in \Theta} \ell(\theta) - \sup_{\theta \in \Theta_0} \ell(\theta) \right] \geq 0,$$

onde  $\ell(\theta) = \log \mathcal{L}(\theta)$ , para realizar o contraste. Esta cantidade é maior canto máis pequeno sexa o valor da verosimilitude dentro do conxunto  $\Theta_0$ . Por tanto, o test rexeita a hipótese nula para valores grandes de  $D$ .

## Nova proposta de test

A nosa idea consiste en construír un test de multimodalidade adaptando a estrutura de test definida na sección anterior. Nada máis comezar xa nos xorde o primeiro problema: que modelo paramétrico escoller? En principio non hai ningún modelo paramétrico que recolla correctamente a información do número de modas dunha poboación. Pero sen modelo paramétrico non podemos nin sequera empezar a esbozar a nosa proposta de test.

Para saír deste atranco imos deixar que os propios datos falen. É dicir, imos supoñer que a mostra provén dun modelo non paramétrico apoiándonos na estimación tipo núcleo da función de densidade [3, Capítulo 2]. Dada unha mostra aleatoria simple  $X_1, X_2, \dots, X_n$  dunha variable aleatoria  $X$  absolutamente continua con función de densidade  $f$ , defínese o **estimador tipo núcleo** de  $f$  como

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right);$$

onde  $K$  é a función de densidade dunha normal estandar e  $h$  é un parámetro positivo, que recibe o nome de **xanela** ou **parámetro de suavización** (*bandwidth* en inglés).

Na literatura estatística pódense atopar varios criterios de escolla do valor da xanela para estimar a densidade poboacional de forma óptima [3, Capítulo 3], pero aquí non imos entrar nesas discusións. Nós imos ver  $h$  como un parámetro a partir do cal imos construír unha función de verosimilitude. Así, definimos a **pseudo-verosimilitude** da mostra como a función real positiva

$$\mathcal{L}(h) = \prod_{i=1}^n \hat{f}_h(X_i), \quad (2)$$

onde  $h \in (0, +\infty)$ . Poderíamos pensar na función  $\mathcal{L}$  como nunha verosimilitude paramétrica onde a familia paramétrica de densidades que estamos a supoñer é  $\{\hat{f}_h : h > 0\}$ , aínda que esta familia non é independente dos datos observados, senón que vén determinada directamente por eles.

Para poder formular o noso test de multimodalidade coa linguaxe dos tests de razón de verosimilitudes, precisamos traducir as hipóteses nula e alternativa definidas en (1) a unha partición do espazo de parámetros  $\Theta = (0, +\infty)$ . Para iso apoiáronos no resultado de [2], que proba que o número de modas do estimador

$\hat{f}_h$  é unha función decrecente en  $h$ . Esta monotonía permítelle a [2] definir o concepto de **xanela crítica**, *critical bandwidth* en inglés. Así, a xanela crítica para  $k$  modas,  $h_k$ , defínese como o menor parámetro de suavización  $h$  tal que  $\hat{f}_h$  ten  $k$  modas:

$$h_k = \min\{h : \hat{f}_h \text{ ten como máximo } k \text{ modas}\}.$$

Así,  $h_k$  marca a fronteira entre as estimacións tipo núcleo con máis e menos de  $k$  modas. Se  $h$  é menor que  $h_k$ ,  $\hat{f}_h$  ten máis de  $k$  modas, pero se  $h$  é maior que  $h_k$ , o número de modas de  $\hat{f}_h$  é menor ou igual que  $k$ . Esa é precisamente a división entre as hipóteses nula e alternativa de (1), polo que xa podemos traducir estas hipóteses a unha partición do conxunto  $(0, +\infty)$ :

$$\Theta_0 = [h_k, +\infty), \quad \Theta_1 = (0, h_k).$$

E por tanto xa podemos definir o noso estatístico de contraste de forma totalmente análoga ao do test de razón de verosimilitudes paramétrico:

$$D_k = 2 \left[ \sup_{h>0} \ell(h) - \sup_{h \geq h_k} \ell(h) \right],$$

onde  $\ell(h) = \log \mathcal{L}(h)$ . Pero hai un problema. Tal como está pensado, o estatístico de contraste  $D_k$  non está ben definido. Non resulta moi difícil demostrar que  $\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{L}(h) = +\infty$ , e por tanto  $\sup_{h>0} \ell(h)$  non é un número real.

Un xeito de resolver este problema é redefinir a función  $\mathcal{L}$  dada por (2) mediante validación cruzada. Para iso, imos apoiarnos nas funcións:

$$\hat{f}_h^{-i}(x) = \frac{1}{(n-1)h} \sum_{j=1, j \neq i}^n K\left(\frac{x - X_j}{h}\right).$$

Daquela, definimos a **pseudo-verosimilitude por validación cruzada** da mostra  $X_1, \dots, X_n$  como

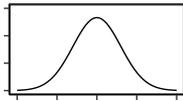
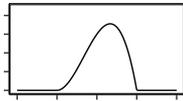
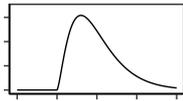
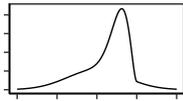
$$\mathcal{L}_{CV}(h) = \prod_{i=1}^n \hat{f}_h^{-i}(X_i), \quad h > 0.$$

Con isto conseguimos que  $\mathcal{L}_{CV}$  sexa unha función limitada superiormente. Polo tanto, o estatístico

$$D_k = 2 \left[ \sup_{h>0} \ell_{CV}(h) - \sup_{h \geq h_k} \ell_{CV}(h) \right],$$

onde  $\ell_{CV}(h) = \log \mathcal{L}_{CV}(h)$ , si está ben definido. Este será o estatístico de contraste que empreguemos no noso test de multimodalidade. Igual que no test de razón de verosimilitudes usual, rexeitaremos a hipótese nula para valores grandes de  $D_k$ . O calibrado do test realizarase por bootstrap suavizado, lanzando remostras da función de densidade  $\hat{f}_{h_k}$ .

Táboa 1: Proporções de rexeitamentos para o novo test con nivel de significación ao 1%, 5% e 10% calculadas a partir de  $M = 1000$  mostras. Para o calibrado empregáronse 500 remostras bootstrap. Cada fila correspóndese cunha combinación de distribución e tamaño de mostra distinta.

Modelo	Densidade	Tamaño	Nivel de significación		
			1 %	5 %	10 %
M1		$n = 100$	0.001	0.011	0.039
		$n = 500$	0.002	0.019	0.034
M2		$n = 100$	0.018	0.080	0.141
		$n = 500$	0.050	0.147	0.238
M3		$n = 100$	0.008	0.035	0.079
		$n = 500$	0.011	0.052	0.100
M4		$n = 100$	0.018	0.075	0.139
		$n = 500$	0.040	0.106	0.152

## Estudo de simulación

Nesta sección comprobaremos o comportamento do novo test na práctica mediante un estudo de simulación. Con el queremos verificar se é correcto o calibrado do novo test á hora de contrastar as hipóteses definidas en (1) tomando  $k = 1$ . É dicir, imos contrastar se a variable aleatoria  $X$  ten unha única moda.

O procedemento realizado foi o seguinte. Primeiro simulamos  $M = 1000$  mostras de tamaño  $n$  de diversas distribucións unimodais. A cada unha destas mostras aplicámoslle o novo contraste, vendo se rexeita ou non a unimodalidade dos datos para varios niveis de significación  $\alpha$ . Finalmente, calculamos a proporción de mostras rexeitadas do total para cada nivel de significación.

As distribucións unimodais consideradas no estudo de simulación son as seguintes:

- **Modelo 1 (M1):** unha normal de media 0.5 e varianza 0.09.
- **Modelo 2 (M2):** unha Beta(3, 2).
- **Modelo 3 (M3):** unha chi cadrado de 5 graos de liberdade reescalada:  $0.1 \cdot \chi_5$ .
- **Modelo 4 (M4):** unha mistura dunha normal cunha beta:  $0.5 \cdot \text{Beta}(10, 3) + 0.5 \cdot \text{N}(0.5, 0.137)$ .

Como só consideramos distribucións unimodais (é dicir, baixo a hipótese nula) se o test está ben calibrado as proporcións de rexeitamentos non deberían de exceder o nivel de significación  $\alpha$ .

Realizamos o anterior para dous tamaños de mostra distintos,  $n = 100$  e  $n = 500$ . Os niveis de significación considerados son os tres máis usuais:  $\alpha = 0.01$ ,  $\alpha = 0.05$  e  $\alpha = 0.1$ .

Á vista dos resultados, recollidos na Táboa 1, a conclusión é clara: o test non ofrece un calibrado satisfactorio. O test presenta proporcións de rexeitamento maiores que o nivel de significación para os Modelos 2 e 4 en todos os escenarios considerados. Ademais, nestes dous casos aumentar o tamaño da mostra de  $n = 100$  a  $n = 500$  provoca que as proporcións de rexeitamento aumenten, afastándose aínda máis do nivel de significación  $\alpha$ . Respecto aos demais escenarios considerados, o novo test só logra proporcións de rexeitamento similares ao nivel de significación nun caso (Modelo 3 con tamaño  $n = 500$ ). No resto, as proporcións de rexeitamento obtidas son sempre menores que o nivel de significación.

## Conclusións

O mal calibrado detectado no estudo de simulación confirma que o test baseado en pseudo-verosimilitude non é capaz de detectar satisfactoriamente a hipótese nula a partir dunha mostra finita. Por tanto, este test non é un bo método para contrastar o verdadeiro número de modas dunha distribución.

Contando isto nunha charla do Seminario de Iniciación á Investigación pretendía ilustrar que en investigación non todo sae ben. Igual que aconteceu coa nova proposta de test, a maior parte das ideas xurdidas na etapa doutoral caen en saco roto. Coa miña charla quería resaltar que iso non é algo que estea ben ou mal, senón que é algo normal e intrínseco á carreira investigadora.

## Bibliografía

- [1] Choi, D.Y., Wittig, T.W., e Kluever, B.M. (2020). An evaluation of bird and bat mortality at wind turbines in the Northeastern United States. *PloS one*, 15, e0238034.
- [2] Silverman, B.W. (1981). Using kernel density estimates to investigate multimodality. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, 43, 97-99.
- [3] Wand, M.P., e Jones, M.C. (1995). *Kernel Smoothing*. Chapman and Hall.

## Álgebras de Hopf. Ecuación Cuántica de Yang-Baxter

Área de Álgebra

Brais Ramos Pérez

Universidade de Santiago de Compostela

20 de octubre de 2021

### Introducción

Las Álgebras de Hopf nacen a mediados del siglo pasado como una herramienta más topológica que algebraica. Aparecen por vez primera en los estudios de Heinz Hopf sobre cohomología de grupos de Lie compactos. A partir de mediados de los años 60, estas estructuras empiezan a ser estudiadas desde un punto de vista puramente algebraico, gracias sobre todo a las aportaciones de Sweedler, destacando la publicación en 1969 de [4]. A pesar de todo, su importancia sufrió un gran crecimiento a partir de la década de los 80, cuando se convirtieron en el contexto adecuado para el estudio de las soluciones de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter (QYBE), gracias a las aportaciones de Drinfeld junto con Jimbo en [1].

### Álgebras de Hopf

En esta sección se tratará de abordar el concepto de álgebra de Hopf, partiendo de sus estructuras subyacentes más simples: álgebra, coálgebra y biálgebra. Además, se denotará por  $\mathbb{K}$  un cuerpo arbitrario.

**Definición 1.** Una  $\mathbb{K}$ -álgebra es una terna  $(V, \mu, \eta)$  donde  $V$  es un  $\mathbb{K}$ -espacio Vectorial junto con los morfismos  $\mathbb{K}$ -lineales multiplicación,  $\mu: V \otimes V \rightarrow V$ , y unidad,  $\eta: \mathbb{K} \rightarrow V$ , que hacen conmutativos los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 V \otimes V \otimes V & \xrightarrow{\mu \otimes id_V} & V \otimes V \\
 \downarrow id_V \otimes \mu & & \downarrow \mu \\
 V \otimes V & \xrightarrow{\mu} & V
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 \mathbb{K} \otimes V & \xrightarrow{\eta \otimes id_V} & V \otimes V & \xleftarrow{id_V \otimes \eta} & V \otimes \mathbb{K} \\
 & \searrow \simeq & \downarrow \mu & \swarrow \simeq & \\
 & & V & & 
 \end{array}$$

Figura 1: Asociatividad y propiedad de la unidad.

---

PALABRAS CLAVE: álgebra; coálgebra; biálgebra; álgebra de Hopf; Ecuación Cuántica de Yang-Baxter; álgebra de Hopf trenzada.

Además, se dirá que una  $\mathbb{K}$ -álgebra es **conmutativa** si se verifica que  $\mu = \mu^{op}$ , donde  $\mu^{op} := \mu \circ \tau_{V,V}$  siendo  $\tau_{V,V}$  el isomorfismo de  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales:

$$\begin{aligned} \tau_{V,V}: V \otimes V &\longrightarrow V \otimes V \\ x \otimes y &\longmapsto y \otimes x. \end{aligned}$$

Será también de especial relevancia la noción de morfismo de álgebras.

**Definición 2.** Sean  $(V, \mu_V, \eta_V)$  y  $(W, \mu_W, \eta_W)$   $\mathbb{K}$ -álgebras. Una aplicación  $\mathbb{K}$ -lineal  $f: V \longrightarrow W$  se dice **morfismo de  $\mathbb{K}$ -álgebras** si verifica:

$$\begin{aligned} \mu_W \circ (f \otimes f) &= f \circ \mu_V, \\ f \circ \eta_V &= \eta_W. \end{aligned}$$

Se procederá entonces a definir el concepto de coálgebra, que se conoce como la *estructura dual* de un álgebra. Estas se obtienen invirtiendo las flechas de los morfismos que intervienen en la definición de álgebra.

**Definición 3.** Una  **$\mathbb{K}$ -coálgebra** es una terna  $(V, \Delta, \varepsilon)$  donde  $V$  es un  $\mathbb{K}$ -Espacio Vectorial junto con los morfismos  $\mathbb{K}$ -lineales comultiplicación,  $\Delta: V \longrightarrow V \otimes V$ , y counidad,  $\varepsilon: V \longrightarrow \mathbb{K}$ , los cuales deben hacer conmutativos los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\Delta} & V \otimes V \\ \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta \otimes id_V \\ V \otimes V & \xrightarrow{id_V \otimes \Delta} & V \otimes V \otimes V \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \mathbb{K} \otimes V & \xleftarrow{\varepsilon \otimes id_V} & V \otimes V & \xrightarrow{id_V \otimes \varepsilon} & V \otimes \mathbb{K} \\ & \searrow \simeq & \uparrow \Delta & \swarrow \simeq & \\ & & V & & \end{array}$$

Figura 2: Coasociatividad y propiedad de la counidad.

Además, se dirá que una  $\mathbb{K}$ -coálgebra es **coconmutativa** si  $\Delta = \Delta^{cop}$ , donde  $\Delta^{cop} := \tau_{V,V} \circ \Delta$ .

De la misma manera, también se define el concepto de morfismo de coálgebras.

**Definición 4.** Sean  $(V, \Delta_V, \varepsilon_V)$  y  $(W, \Delta_W, \varepsilon_W)$   $\mathbb{K}$ -coálgebras. Una aplicación  $\mathbb{K}$ -lineal  $f: V \longrightarrow W$  se dice **morfismo de  $\mathbb{K}$ -coálgebras** si cumple:

$$\begin{aligned} (f \otimes f) \circ \Delta_V &= \Delta_W \circ f, \\ \varepsilon_W \circ f &= \varepsilon_V. \end{aligned}$$

Naturalmente, cabe preguntarse qué estructura adquirirá el  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{K})$  en función de la estructura de álgebra o de coálgebra que presente el  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $V$ . Esta relación se establece en el siguiente resultado.

**Proposición 1** (Underwood, [3]).

1. Si  $(V, \Delta, \varepsilon)$  es una  $\mathbb{K}$ -coálgebra, entonces  $V^*$  admite estructura de  $\mathbb{K}$ -álgebra.
2. Si  $(V, \mu, \eta)$  es una  $\mathbb{K}$ -álgebra de dimensión finita, entonces  $V^*$  admite estructura de  $\mathbb{K}$ -coálgebra.

La siguiente etapa del camino que se recorre para definir *álgebra de Hopf* pasa por abordar el concepto de biálgebra, que se trata de un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial que presenta simultáneamente estructura de álgebra y coálgebra. Estas estructuras deben relacionarse de una manera determinada, la cual se establece en el siguiente lema.

**Lema 1** (Condición de compatibilidad, Kassel, [2]). Sean  $(V, \mu, \eta)$  una  $\mathbb{K}$ -álgebra y  $(V, \Delta, \varepsilon)$  una  $\mathbb{K}$ -coálgebra. Son equivalentes:

1.  $\mu$  y  $\eta$  son morfismos de  $\mathbb{K}$ -coálgebras.
2.  $\Delta$  y  $\varepsilon$  son morfismos de  $\mathbb{K}$ -álgebras.

**Definición 5.** Una  $\mathbb{K}$ -**biálgebra** es una *quíntupla*  $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$  donde  $(V, \mu, \eta)$  es una  $\mathbb{K}$ -álgebra,  $(V, \Delta, \varepsilon)$  es una  $\mathbb{K}$ -coálgebra y además se verifica la condición de compatibilidad dada por el Lema 1.

Antes de dar la definición de álgebra de Hopf es necesario introducir una operación sobre el conjunto  $\text{Hom}(W, V)$  donde  $W$  es una  $\mathbb{K}$ -coálgebra y  $V$  una  $\mathbb{K}$ -álgebra. Esta operación se conoce como la *convolución*.

**Definición 6.** Sean  $(V, \mu_V, \eta_V)$  una  $\mathbb{K}$ -álgebra,  $(W, \Delta_W, \varepsilon_W)$  una  $\mathbb{K}$ -coálgebra y  $f, g \in \text{Hom}(W, V)$ . La **convolución de  $f$  con  $g$** ,  $f * g$ , viene dada por la siguiente composición:

$$f * g := \mu_V \circ (f \otimes g) \circ \Delta_W \in \text{Hom}(W, V).$$

**Proposición 2** (Underwood, [3]). Si  $(V, \mu_V, \eta_V)$  es una  $\mathbb{K}$ -álgebra y  $(W, \Delta_W, \varepsilon_W)$  una  $\mathbb{K}$ -coálgebra, entonces  $(\text{Hom}(W, V), *)$  es un monoide con elemento neutro  $\eta_V \circ \varepsilon_W$ .

Como consecuencia de este resultado, si  $(V, \mu_V, \eta_V, \Delta_V, \varepsilon_V)$  es una  $\mathbb{K}$ -biálgebra, entonces  $(\text{End}(V), *)$  es un monoide con neutro  $\eta_V \circ \varepsilon_V$ . La convolución lleva a la definición de antípodo.

**Definición 7.** Sea  $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$  una  $\mathbb{K}$ -biálgebra. Se denomina **antípodo** a una aplicación  $\mathbb{K}$ -lineal  $S \in \text{End}(V)$  que verifica:

$$S * id_V = id_V * S = \eta \circ \varepsilon.$$

En otras palabras, el antípodo es un inverso tanto por la derecha como por la izquierda de  $id_V$  para la convolución.

**Observación 1.** Nótese que, en caso de existir un antípodo  $S \in \text{End}(V)$ , este es único.

Entonces, ya se poseen todos los ingredientes necesarios para definir el concepto de álgebra de Hopf.

**Definición 8.** Una  $\mathbb{K}$ -álgebra de Hopf es una 6-tupla  $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$  donde  $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$  es una  $\mathbb{K}$ -biálgebra y existe un único antípodo  $S \in \text{End}(V)$ .

Con el siguiente ejemplo se tratarán de aclarar los conceptos de álgebra, coálgebra, biálgebra y álgebra de Hopf que se han expuesto hasta el momento.

**Ejemplo 1.** Considérese  $V = \mathbb{K}[G]$  el  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con base  $G$ , donde  $(G, \cdot)$  tiene estructura de grupo multiplicativo con elemento neutro  $e$ . Con las operaciones:

$$\begin{aligned} \mu: \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[G] &\longrightarrow \mathbb{K}[G] & \Delta: \mathbb{K}[G] &\longrightarrow \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[G] \\ x \otimes y &\longmapsto x \cdot y \quad \forall x, y \in G & x &\longmapsto x \otimes x \quad \forall x \in G \\ \\ \eta: \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K}[G] & \varepsilon: \mathbb{K}[G] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ 1_{\mathbb{K}} &\longmapsto e & x &\longmapsto 1_{\mathbb{K}} \quad \forall x \in G \end{aligned}$$

$\mathbb{K}[G]$  adopta estructura de  $\mathbb{K}$ -biálgebra. Se verifica además que existe un único antípodo  $S \in \text{End}(\mathbb{K}[G])$ . En efecto: tómese  $x \in G$  cualquiera,

$$\begin{aligned} (S * id_{\mathbb{K}[G]})(x) &= S(x) \cdot x, \\ (id_{\mathbb{K}[G]} * S)(x) &= x \cdot S(x), \\ (\eta \circ \varepsilon)(x) &= e. \end{aligned}$$

Entonces, sobre cualquier elemento de  $G$ , en caso de existir antípodo, este debe verificar que  $S(x) \cdot x = x \cdot S(x) = e, \forall x \in G$ . Por la unicidad del inverso de cada elemento en un grupo, se deduce que:

$$\begin{aligned} S: \mathbb{K}[G] &\longrightarrow \mathbb{K}[G] \\ x &\longmapsto x^{-1} \quad \forall x \in G, \end{aligned}$$

es el antípodo de  $\mathbb{K}[G]$ . Por lo tanto,  $\mathbb{K}[G]$  tiene estructura de  $\mathbb{K}$ -álgebra de Hopf.

## Ecuación Cuántica de Yang-Baxter

En esta sección se tratará de relacionar la teoría de álgebras de Hopf con las soluciones de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter. Esta relación vendrá dada a partir de un tipo particular de álgebras de Hopf, las llamadas álgebras de Hopf trenzadas.

Se comenzará introduciendo la definición de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter (**QYBE**). Dado un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $V$ , se dice que  $c \in \text{Aut}(V \otimes V)$  es solución de QYBE si se cumple la igualdad que sigue:

$$(c \otimes id_V) \circ (id_V \otimes c) \circ (c \otimes id_V) = (id_V \otimes c) \circ (c \otimes id_V) \circ (id_V \otimes c). \quad (1)$$

Las soluciones de QYBE se denominan ***R*-matrices** y la ecuación (1) se puede representar mediante el siguiente diagrama:

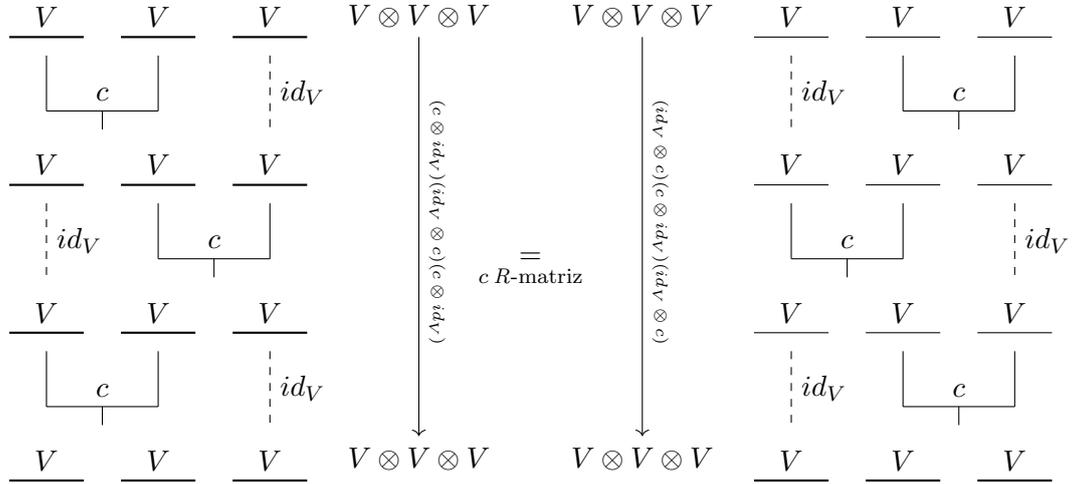


Figura 3: Ecuación Cuántica de Yang-Baxter (QYBE).

Como ya se mencionó previamente, el objetivo de esta sección será relacionar la teoría de álgebras de Hopf con las soluciones de (1). Para tal fin, será imprescindible definir el concepto de álgebra de Hopf trenzada. Se establece la siguiente notación: si  $V$  es una  $\mathbb{K}$ -álgebra de Hopf y  $R = \sum_i s_i \otimes t_i \in V \otimes V$ , se denotará por

$$R_{13} = \sum_i s_i \otimes 1_V \otimes t_i, \quad R_{12} = \sum_i s_i \otimes t_i \otimes 1_V, \quad R_{23} = \sum_i 1_V \otimes s_i \otimes t_i.$$

**Definición 9.** Sea  $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$  una  $\mathbb{K}$ -álgebra de Hopf. Se dirá que  $V$  es una ***álgebra de Hopf trenzada*** si existe  $R = \sum_i s_i \otimes t_i \in V \otimes V$  inversible verificando las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \Delta^{cop}(x) &= R\Delta(x)R^{-1} \quad \forall x \in V, \\ (\Delta \otimes id_V)(R) &= R_{13}R_{23}, \\ (id_V \otimes \Delta)(R) &= R_{13}R_{12}. \end{aligned}$$

A continuación, se enuncia la propiedad fundamental de las álgebras de Hopf trenzadas.

**Proposición 3** (Kassel, [2]). Si  $(V, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, R)$  es una  $\mathbb{K}$ -álgebra de Hopf trenzada, se cumple la siguiente igualdad:

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

En lo que sigue se verá cómo estas estructuras ayudan a la obtención de *R*-matrices. Sea  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, R)$  una  $\mathbb{K}$ -álgebra de Hopf trenzada con antípodo  $S \in \text{Aut}(H)$ ,

es decir,  $S$  inversible, y sean  $V$  y  $W$   $H$ -módulos. Se define la aplicación:

$$c_{V,W}^R: V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$$

$$x \otimes y \longmapsto \sum_i t_i y \otimes s_i x,$$

la cual cumple las propiedades enunciadas en el siguiente resultado.

**Proposición 4** (Kassel, [2]). *Si  $U$ ,  $V$  y  $W$  son  $H$ -módulos en las hipótesis previas, entonces:*

1.  $c_{V,W}^R$  es un isomorfismo de  $H$ -Módulos.
2.  $(c_{V,W}^R \otimes id_U) \circ (id_V \otimes c_{U,W}^R) \circ (c_{U,V}^R \otimes id_W) = (id_W \otimes c_{U,V}^R) \circ (c_{U,W}^R \otimes id_V) \circ (id_U \otimes c_{V,W}^R)$ .

Entonces, si particularizamos el punto 2 de la proposición anterior a  $U = V = W$  el mismo  $H$ -módulo, se obtendría el resultado fundamental de esta sección, que relaciona la ecuación QYBE (1) con las álgebras de Hopf trenzadas: si  $V$  es un  $H$ -módulo,  $c_{V,V}^R$  es una  $R$ -matriz.

## Conclusiones

Una vez probado el resultado anterior surgió la necesidad de obtener álgebras de Hopf trenzadas, pero los ejemplos iniciales no fueron sencillos ni tampoco muy abundantes. Por ello, se planteó la siguiente pregunta: ¿existe algún método para la obtención de manera sistemática de álgebras de Hopf trenzadas?

La respuesta a tal pregunta es afirmativa y se debe de nuevo a Drinfeld. Él propuso un método para la obtención de un álgebra de Hopf Trenzada a partir de un álgebra de Hopf cualquiera. Este se conoce en la actualidad como el *Doble de Drinfeld*. Los detalles de su construcción para dimensión finita se pueden encontrar en Kassel [2].

Por lo tanto, tomando un álgebra de Hopf  $H$  de dimensión finita arbitraria y construyendo su Doble de Drinfeld asociado,  $D(H)$ , todo módulo  $V$  sobre  $D(H)$  induce una solución de (1) a partir de la aplicación  $c_{V,V}^R$ .

## Bibliografía

- [1] Drinfeld, V. G. (1986). Quantum Groups. *Proceedings of International Congress of Mathematics*, 789-820. Berkeley.
- [2] Kassel, C. (1995). *Quantum Groups* (Vol. 155). Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. New York.
- [3] Underwood, R. G. (2015). *Fundamentals of Hopf Algebras*. Springer.
- [4] Sweedler, M. E. (1969). *Hopf Algebras*. WA Benjamin Inc.

## Regresión Logística Multinomial: aplicación en un caso social

Área de Estadística e Investigación Operativa

Sabina Pelerino Rodés

Universidad de Vigo

3 de noviembre de 2021

### Resumen

En esta charla se explicó el contenido de una investigación en la que se estudiaron los factores que inciden en el rezago estudiantil de los grados de la Facultad de Ciencias Sociales de la Universidad de la República, Uruguay. Aplicando el modelo de regresión logística multinomial, se realizó un estudio de tipo transversal, utilizando los datos de ingreso y egreso.

A partir de la generación teórica de tres categorías de rezago estudiantil: sin rezago, rezago moderado y rezago fuerte, se construyó un modelo de efectos principales, con un intervalo de confianza del 95 por ciento con categoría de referencia sin rezago, buscando su relación con diferentes variables independientes.

### Introducción

La Universidad de la República (Udelar), es la universidad más importante de Uruguay, cuenta con 135757 estudiantes activos y es pública, gratuita y sin restricciones en el ingreso en la mayoría de sus carreras universitarias. Esto implica que presenta niveles de desvinculación y rezago mayores a su titulación. Particularmente la Facultad de Ciencias Sociales (FCS), es una de las facultades con mayores niveles de rezago, siendo la duración promedio real de las carreras el doble de lo teóricamente establecido.

Se investigó para el caso de la FCS de la Udelar, los factores socioeconómicos, individuales y de transición a la vida adulta que intervienen en el fenómeno rezago. Realizando un estudio de tipo transversal (al inicio y final de la carrera) de los egresados de las cinco carreras de FCS entre 2014 y 2018. Los datos fueron recopilados a través de los formularios de Egreso e Ingreso de la Udelar (5 bases de datos de egresos desde 2014 a 2018 para analizar el egreso, y 15 bases de datos de ingresos desde 2001 a 2015 para analizar los ingresos correspondientes a dichos egresos), implicando un total de casos de 1066. Para su estudio se aplicó el modelo de regresión logística multinomial.

Según Cea DAncona [4], la regresión logística se utiliza para el análisis de variables dependientes categóricas, buscando predecir la probabilidad de ocurrencia de

un determinado evento a partir de los valores que presenten una serie de variables categóricas y/o continuas analizadas, determinando el grado de relación existente entre las variables independientes y la variable dependiente y su significatividad. En este sentido, la regresión logística multinomial es más general debido a que la variable dependiente puede tener más de dos categorías.

Los supuestos de la regresión logística multinomial son: tamaño muestral elevado; variables independientes relevantes para la predicción de la variable dependiente; ausencia de colinealidad entre las variables predictoras; aditividad; no-linealidad de la variable dependiente; celdillas de no cero; y heterocedasticidad.

En el presente estudio, se considera la variable rezago estudiantil como variable respuesta, con categorías las siguientes posibles categorías: sin rezago, rezago moderado y rezago fuerte. Las distintas variables explicativas categóricas y sus respectivas categorías vienen dadas en la Tabla 1.

<b>Variable</b>	<b>Categorías</b>
Nivel educativo de los padres	Hasta educación media completa; Educación terciaria completa; No sabe
Posición ocupacional principal de los padres	Directivos; Técnicos; Gerentes; Profesionales; Docentes; Otros; No sabe
Lugar de nacimiento	Montevideo; Interior; Exterior
Lugar de residencia al ingreso	Montevideo; Interior; Exterior
Lugar de residencia al egreso	Montevideo; Interior; Exterior
Tipo de bachillerato	Público; Privado
Sexo	Varón; Mujer
Edad al ingreso	Directamente de secundaria (sin rezago); Después de secundaria o con rezago en ella
Recepción de becas	Sí; No
Situación laboral al ingreso	Trabajador; Desempleado; Inactivo
Situación laboral al egreso	Trabajador; Desempleado; Inactivo
Otros estudios terciarios	Sí; No
Participación laboral durante la carrera	Al comenzar y finalizar; Solo al finalizar; Solo al comenzar; Ninguna
Cambios en independencia durante la carrera	Disminución; Aumento; Igual
Estado conyugal o unión libre durante la carrera	Casado al comenzar y al finalizar; Casado solo al comienzo; Casado solo al final; Soltero
Maternidad/paternidad durante la carrera	No; Desde el inicio; No en el inicio y si al finalizar

Tabla 1: Variables explicativas y sus categorías.

## El modelo de regresión logístico multinomial

Sea  $Y$  una variable aleatoria categórica que puede pertenecer a  $K$  categorías distintas. Sean  $X_1, \dots, X_p$  variables explicativas categóricas. Supóngase una muestra aleatoria simple de tamaño  $n$ , dada por  $\{(y_i, x_{i1}, \dots, x_{ip})\}_{i=1, \dots, n}$ , donde  $y_i$  representa la categoría a la que pertenece la  $i$ -ésima observación y  $x_{i1}, \dots, x_{ip}$  denotan las categorías de las  $p$  variables explicativas para el  $i$ -ésimo individuo. Supongamos también que existen  $Q$  combinaciones diferentes de valores de las variables explicativas y para cada  $x_q = (x_{q1}, \dots, x_{qp})'$  con  $q = 1, \dots, Q$ , existe una respuesta politómica  $(y_{q1}, \dots, y_{qK})'$ , con  $y_{qk}$  denotando el número de observaciones pertenecientes a la categoría  $k$ .

En el modelo de regresión logístico multinomial, la probabilidad de pertenecer a la categoría  $j$  cuando los valores de las variables explicativas pertenecen a la categoría  $q$  viene dada por

$$\Pi_{kq} = \frac{e^{(\sum_{t=0}^p \beta_{tk} x_{qt})}}{1 + \sum_{k=1}^{K-1} e^{(\sum_{t=0}^p \beta_{tk} x_{qt})}} \quad \forall q = 1, \dots, Q; \quad \forall k = 1, \dots, K, \quad (1)$$

donde los  $\beta_{tk}$ , con  $t = 1, \dots, p$ ,  $k = 1, \dots, K$ , representan los coeficientes del modelo.

## Ajuste del modelo y contraste de bondad de ajuste

Se aplicó el modelo (1), de efectos principales, a los datos de egresados descritos anteriormente, empleando todas las covariables. Para ello, la categoría sin rezago es empleada como la categoría de referencia  $K$ . Además del ajuste del modelo, se realizó un contraste de razón de verosimilitudes para determinar la significación de las covariables. Los resultados se muestran en la Tabla 2. Se obtiene que el modelo es significativo estadísticamente (considerando 0.05 como nivel de significación) debido a que el  $p$ -valor resultante es menor que el nivel nominal.

Modelo	Criterios de ajuste de modelo	Razón de verosimilitudes		
	-2 × Log-verosimilitud	Chi-cuadrado	gl	Sig.
Solo intercepto	1752.736			
Final	1550.950	201.787	62	0.000

Tabla 2: Información sobre el ajuste del modelo.

A continuación, a través del contraste de bondad de ajuste se observa qué tan adecuado es el modelo para el ajuste de los datos. Las hipótesis consideradas son:

$$H_0 : \Pi_{kq} = \frac{e^{(\sum_{t=0}^p \beta_{tk} x_{qt})}}{1 + \sum_{k=1}^{K-1} e^{(\sum_{t=0}^p \beta_{tk} x_{qt})}} \quad \forall q = 1, \dots, Q; \quad \forall k = 1, \dots, K,$$

$$H_1 : \Pi_{kq} \neq \frac{e^{(\sum_{t=0}^p \beta_{tk} x_{qt})}}{1 + \sum_{k=1}^{K-1} e^{(\sum_{t=0}^p \beta_{tk} x_{qt})}} \quad \text{para algún } q = 1, \dots, Q, \quad k = 1, \dots, K.$$

Para contrastar la hipótesis nula se pueden utilizar el estadístico de Pearson o el estadístico del Wilks, también llamado desvianza. El estadístico de Pearson viene dado por

$$\chi^2(M) = \sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^K \frac{(y_{qk} - m_q \hat{\pi}_{qk})^2}{m_q \hat{\pi}_{qk}},$$

donde  $\hat{\pi}_{qk}$  representa la probabilidad pertenecer a la categoría  $k$  cuando se tiene la  $q$ -ésima combinación de las covariables, estimada mediante el modelo y  $m_q$  representa el número de veces que se repite la  $q$ -ésima combinación de covariables.

Por otra parte, la desvianza viene dada por

$$S_n^{(1)} = 2 \left[ \iota^{(1)}(\hat{\pi}; y_1, \dots, y_n) - \iota_0^{(1)}(\hat{\beta}; y_1, \dots, y_n) \right],$$

donde  $\iota^{(1)}$  representa la log-verosimilitud del modelo saturado y  $\iota_0^{(1)}$  representa la log-verosimilitud del modelo ajustado, donde  $\hat{\beta}$  denota el vector de coeficientes estimados en el modelo (1).

Si el  $p$ -valor asociado a los estadísticos (Pearson o Wilks) es mayor que 0.05 no se puede rechazar hipótesis nula ( $H_0$ ) para este nivel de significación, considerando el modelo estimado aceptable para estimar las probabilidades de pertenencia de las categorías de la variable dependiente. Los resultados de los contrastes aplicados a los datos de egreso se encuentran en la Tabla 3. Debido a que los  $p$ -valores obtenidos son  $0.097 > 0.05$  para Pearson y  $0.279 > 0.05$  para la desvianza, se puede considerar que se ajustan bien los datos, ya que no se puede rechazar la hipótesis nula.

	Chi-cuadrado	gl	Sig.
Pearson	1549.213	1478	0.097
Desvianza	1509.465	1478	0.279

Tabla 3: Información sobre los contrastes de bondad de ajuste.

## Pseudo-R2 del modelo

La calidad del ajuste del modelo se puede medir a través de distintos coeficientes (todos pueden presentar valores entre 0 y 1). El coeficiente pseudo-R2 de Mc-Fadden viene dado por

$$R_{MF}^2 = 1 - \frac{A_f}{A_0},$$

donde  $A_f$  es la log-verosimilitud para el modelo ajustado y  $A_0$  es la correspondiente al modelo nulo. Se considera de buena calidad el ajuste cuando está entre 0.2 y 0.4. Por otra parte, el coeficiente pseudo-R2 de Cox-Snell viene dado por

$$R_{CS}^2 = 1 - \left( \frac{e^{A_0}}{e^{A_f}} \right)^{\frac{2}{N}}.$$

Por último, el coeficiente pseudo-R2 de Nagelkerke tiene la forma

$$R_N^2 = \frac{R_{CS}^2}{1 - e^{A_0 \frac{2}{N}}}.$$

El coeficiente de Cox-Snell es poco interpretable, ya que puede ser próximo a cero cuando hay pocos datos. Es preferible utilizar el coeficiente de Nagelkerke, el cual se interpreta igual que el coeficiente de determinación de la regresión lineal (cuanto más cercano a 1 sea, mayor será la capacidad de predicción), pero es más difícil que presente valores cercanos a 1 (esto se debe tener en cuenta aún más para el fenómeno estudiado, ya que es sabido que las problemáticas estudiadas por las ciencias sociales siempre implican múltiples causas y es muy improbable abarcar todas, por tanto es también improbable que presente valores cercanos a 1). En este modelo los coeficientes pseudo-R2 presentan los siguientes valores: Cox-Snell (0.216), Nagelkerke (0.244) y McFadden (0.112).

Como se puede observar en este modelo el valor del coeficiente de Mc-Fadden es menor al rango entre 0.2 y 0.4 (0.112), lo que indica que no es un modelo malo, pero según esta métrica, tampoco es particularmente fuerte. Esto implica que las variables identificadas en la teoría como relevantes para explicar el fenómeno no lo explican para esta población (lo cual es un gran hallazgo) y que, por tanto, es necesario incorporar en estudios futuros variables referidas a otros tipos de factores (por ejemplo, los institucionales, los cuales no estaban incluidos en las bases de datos). El coeficiente de Cox-Snell es de 0.216 y el coeficiente de Nagelkerke es 0.244, siendo valores de ajuste aceptables.

## Significación y estimación de los parámetros

Consideramos como variables explicativas significativas estadísticamente para el modelo aquellas que tienen una significación menor a 0.05, estas son: EdadIngreso (0.045), TrabajoING (0.003), OtrosEstudios (0.028), EstadoConyugalCuranteCarrera (0.007), CambiosNivelIndependencia (0.001) y MaternidadPaternidadCarrera (0.002). Teniendo en cuenta solo estas variables, se realiza de nuevo el ajuste del modelo. La interpretación de los parámetros del modelo es la que sigue: Los odds ratio ( $B_{tk} = e_{tk}^{\beta}$ ) cambian cuando la  $i$ -ésima variable explicativa regresora se incrementa en una unidad. De esta forma, si  $B_{tk} > 0$ , el odds ratio se incrementa; cuando  $B < 0$ , el odds ratio decrece; y si  $B_{tk} = 0$ , el factor es igual a uno, lo que hace que el odds ratio no varíe. En la aplicación a los datos de egreso, se obtienen las siguientes conclusiones.

**Rezago moderado:** Entre los que mantienen su estado de independencia durante la carrera, la probabilidad de no rezagarse (frente al rezago moderado) es 0.560 veces mayor que entre los que aumentan su nivel de independencia durante la carrera ( $B_{tk} < 0$ ). Entre los que ingresan a FCS inmediatamente después de finalizar sus estudios en secundaria (y sin rezago en ella), la probabilidad de obtener rezago moderado (frente a no rezago) es 1.549 veces mayor que entre los que ingresan

después ( $B_{tk} > 0$ ). Entre los que están desempleados al comenzar la carrera, la probabilidad de rezago moderado (frente a no rezago) es 1.698 veces mayor que entre los que están inactivos ( $B_{tk} > 0$ ). Por último, en el grupo sin estudios terciarios previos, la probabilidad de rezago moderado (frente a no rezago) es 1.610 veces mayor que en el grupo con estudios terciarios previos.

**Rezago fuerte:** Dentro de quienes se casan o realizan unión libre durante la carrera, la probabilidad de rezago fuerte (frente a no rezago) es 1.986 veces mayor que entre los que no estaban casados o realizaron unión libre durante la carrera y tampoco lo estaban al finalizarla ( $B_{tk} > 0$ ). Entre los que mantienen su estado de independencia durante la carrera, la probabilidad de rezago fuerte es 0.413 veces mayor que entre los que aumentan su nivel de independencia durante la carrera ( $B_{tk} < 0$ ). Dentro del grupo de los que son padres/madres por primera vez durante la carrera, la probabilidad de rezago fuerte (frente a no rezago) es 3.525 veces mayor que entre los que no tenían hijos ni los tuvieron durante la carrera ( $B_{tk} > 0$ ). Entre los desempleados al comenzar la carrera, la probabilidad de rezago fuerte (frente a no rezago) es 2.361 veces mayor que entre los que estaban inactivos ( $B_{tk} > 0$ ). Por último, entre quienes no tienen estudios terciarios previos, la probabilidad de rezago moderado (frente a no rezago) es 1.782 veces mayor que entre los que no los poseen ( $B_{tk} > 0$ ).

## Resultados finales y conclusiones

El estar desempleado al comenzar la carrera lleva a que las personas se rezaguen tanto de forma moderada como fuerte. Por otro lado, la edad al ingreso solo es significativa en el rezago moderado, siendo que a mayor edad al ingresar menores posibilidades de rezagarse. Sin embargo, esto no sucede con el rezago fuerte, donde la edad al ingresar no es significativa. El hecho de poseer otros estudios terciarios implica tener menos probabilidades de rezagarse tanto de forma moderada como de forma fuerte. A su vez, los hechos de transición a la vida adulta, en este caso comenzar a trabajar; iniciar la maternidad/paternidad; casarse o mudarse del hogar de origen explican en gran medida que los egresados se hayan rezagado de forma fuerte, siendo solo uno de estos determinantes del rezago moderado (aumentar el nivel de independencia de la vivienda de origen).

El hecho de que el modelo haya presentado coeficientes pseudo-R2 bajos, que se encuentran un poco por debajo de los estándares esperados, implica que los factores identificados por la literatura y antecedentes como influyentes en las trayectorias educativas no cumplen ese rol en la mayoría de los casos en esta cohorte, por lo que resultará pertinente del estudio de otros factores mencionados por la literatura, como son los factores institucionales.

## Bibliografía

- [1] Cea DANcona, M. (2004). *Análisis multivariable. Teoría y práctica en la investigación social*, Editorial Síntesis.

## Teselaciones y espacios homogéneos

Área de Xeometría e Topoloxía

José Luis Carmona Jiménez

Universidad Complutense de Madrid

17 de noviembre de 2021

### Introducción

Maurits Cornelis Escher visitó por primera vez la Alhambra (Granada) en 1922. Las obras nazaríes del lugar le inspiraron para elaborar sus obras conocidas como las teselaciones de Escher (véase [9]). Una teselación es una manera de rellenar el plano (sin dejar huecos) con piezas generadas por un mismo molde.

Estas configuraciones geométricas tienen muchas propiedades buenas. Por ejemplo, con conocer una pieza y las transformaciones que dejan la teselación fija podemos reconstruir la teselación. Sin embargo, también tienen limitaciones; por ejemplo, no existen teselaciones del plano usando pentágonos regulares.

Este resumen busca inspirarse de estas construcciones geométricas para dar la definición de espacio homogéneo. Finalmente, se recomiendan algunos textos básicos con los que introducirse en la investigación de los espacios homogéneos.

### Teselaciones

Sea  $P = \mathbb{R}^2$  el plano infinito. Diremos que una **tesela**  $T$  es un conjunto compacto y conexo en el plano  $P$ . Es decir, es una figura geométrica construida por un molde.

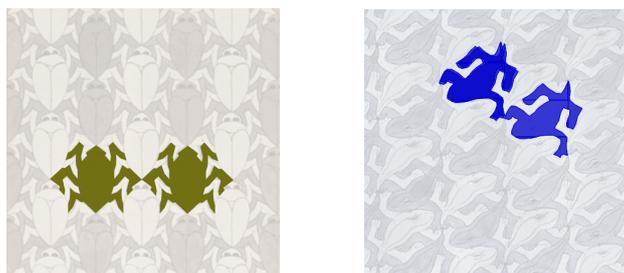


Figura 1: Manuel Sada. Teselaciones n<sup>o</sup> 91 y n<sup>o</sup> 51 de M.C. Escher, donde las teselas están resaltadas ([9]).

Diremos que dos teselas  $T$  y  $T'$  son **congruentes** si existe un movimiento rígido (es decir, que preserva las distancias)  $F: P \rightarrow P$  del plano tal que  $F(T) = T'$ .

---

PALABRAS CLAVE: Teselaciones; Grupos de Lie; Espacios homogéneos.

Es decir, dos teselas son congruentes si están hechas por el mismo molde, aunque podrían situarse en posiciones diferentes del plano. Las teselas marcadas en la Figura 1 son ejemplos de teselas congruentes.

Una **teselación** (el nombre específico es "*monohedral tiling*") es una unión de teselas congruentes, de manera que dos teselas sólo pueden intersectarse en los bordes. Es decir, una teselación es una manera de rellenar el plano  $P$  con piezas generadas por el mismo molde y sin dejar huecos. Veamos algunos ejemplos de teselaciones:



Figura 2: Manuel Sada. Teselaciones n<sup>o</sup> 78 y n<sup>o</sup> 11 de M.C. Escher ([9]).

Consideremos ahora  $G$  el grupo de movimientos rígidos que dejan fija una teselación, es decir, que a toda tesela la envía a otra tesela del teselado. Este grupo de movimientos satisface la siguiente propiedad: dadas dos teselas  $T$  y  $T'$  cualesquiera del teselado existe un movimiento rígido  $F \in G$  tal que  $F(T) = T'$ . Si sucede esto se dice que la acción de  $G$  en el teselado es **transitiva**.

Esta propiedad nos permite simplificar el estudio del teselado a estudiar la forma de una sola tesela. Para reconstruir el teselado, sólo tenemos que seguir los pasos definidos por el grupo  $G$ , es decir, el grupo hace el papel de una receta.

Para finalizar con las teselaciones, veamos algunas curiosidades. Las teselaciones pueden definirse en espacios no planos. Por ejemplo, en esferas o en el disco de Poincaré, como podemos ver en Figura 3 y Figura 4, respectivamente.



Figura 3: Teselaciones n<sup>o</sup> 20 y n<sup>o</sup> 25 de M.C. Escher en esferas. Imágenes obtenidas de [5].

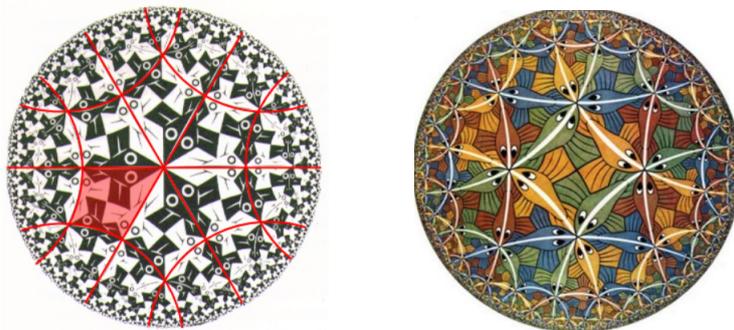


Figura 4: M. C. Escher. "Circle Limit I" (1958) y "Circle Limit III" (1959). Imágenes obtenidas de [1].

La curiosidad final es que no se puede utilizar el molde que queramos para hacer una teselación. Los únicos polígonos regulares con los que se puede teselar el plano son los triángulos, los cuadrados y los hexágonos. El estudio de las teselaciones no es un campo de estudio cerrado: en 2017, Michael Rao [8], publicó un artículo donde probaba todas las configuraciones posibles de teselaciones formadas por pentágonos convexos.



Figura 5: Olena Shmahalo. Las 15 configuraciones de teselaciones de pentágonos convexos ([10]).

## Espacios homogéneos

Con estas ideas en mente de las teselaciones, vamos a introducir los espacios homogéneos. En primer lugar, diremos que  $(G, \cdot)$  es un **grupo de Lie** si es un grupo y las operaciones multiplicación e inverso son diferenciables. Veamos algunos ejemplos de grupos de Lie:

- $(\mathbb{R}^n, +)$ .
- $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ , donde  $GL(n, \mathbb{R})$  es el conjunto abierto de  $\mathbb{R}^{n^2}$  definido por las matrices invertibles y  $\cdot$  es la multiplicación de matrices.
- $(O(n), \cdot)$  donde  $O(n)$  es el subgrupo cerrado de  $GL(n, \mathbb{R})$  de las matrices ortogonales.

Una **superficie homogénea**  $M$  es una superficie en la que actúa **transitivamente** un grupo de Lie  $G$ . Es decir, los elementos del grupo de Lie  $f \in G$  deben identificarse con aplicaciones diferenciables  $f : M \rightarrow M$  de la superficie. La transitividad de la acción quiere decir que: dados dos puntos  $p, q \in M$ , existe una función  $f \in G$  tal que  $f(p) = q$ . El primer ejemplo de superficie homogénea es el plano  $\mathbb{R}^2$  donde actúa el grupo  $G = \mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$  que es el grupo de translaciones seguidas de una rotación. Otros ejemplos son: la esfera, donde actúa  $O(3)$  (el grupo de rotaciones de  $\mathbb{R}^3$ ) y el disco de Poincaré donde actúa el grupo de Lie  $G = SO(2, 1)$ , véase Figura 6.

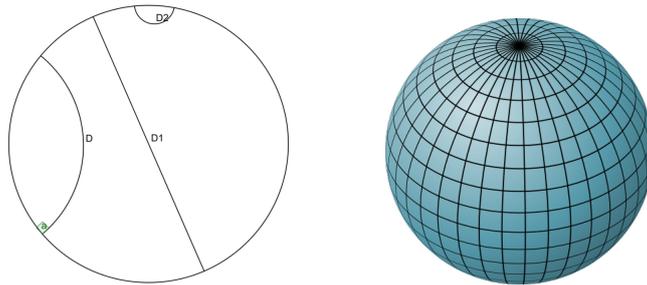


Figura 6: Disco de Poincaré y esfera.

Nótese que la idea principal de las teselaciones se repiten en los espacios homogéneos. En este caso, el grupo de Lie  $G$  hace el papel de la receta con la que reconstruir la geometría de la superficie homogénea a partir de un único punto.

¿Qué es la geometría de la superficie homogénea? Para responder a esta pregunta, es mejor responder cómo es posible dotar de geometría a una superficie, en general. Consideremos el **fibrado tangente** de  $M$ , esto es,  $TM = \dot{\cup}_{p \in M} T_p M$ , donde  $T_p M$  es el espacio tangente de la superficie en el punto  $p$ . Es decir,  $T_p M$  es el plano que mejor aproxima a la superficie en el punto  $p$ , véanse en Figura 7 algunos ejemplos de planos tangentes de la esfera.

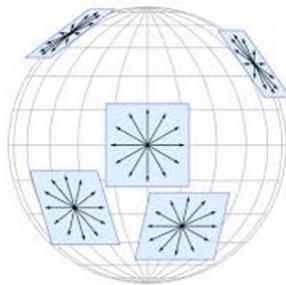


Figura 7: Jo Nelson. Planos tangentes en una esfera ([6]).

La mejor manera de imaginarse este espacio es un traje de lentejuelas y la construcción de este espacio tiene muchas similitudes con la construcción de la teselación, aquí los espacios tangentes (lentejuelas) son disjuntos, al igual que los moldes de las teselas solo intersecan en los bordes. Hay que tener en cuenta que las

lentejuelas pegan como el cuerpo les manda que se peguen, de esta manera podemos pasar información de unas lentejuelas a otras.

La geometría de una superficie vendrá dada por la elección de una manera de medir en cada una de las lentejuelas de  $M$ . Y esa manera de medir viene dada por un producto escalar de este modo: dar una manera de medir en la superficie  $M$  es dar un producto escalar  $g_p$  para cada  $T_pM$ ,  $p \in M$ . Es decir, cada  $(T_pM, g_p)$  cumple el papel de molde.

Para finalizar, las superficies homogéneas cumplen la propiedad fundamental de las teselaciones: es suficiente con saber la geometría en un punto,  $(T_pM, g_p)$ , y la receta  $G$  de la superficie homogénea para impregnar a toda la superficie homogénea de esa geometría.

Utilicemos esta construcción para dotar de geometría al plano  $\mathbb{R}^2$  y al disco de Poincaré  $D = B((0,0), 1)$ , definido sobre la bola abierta de centro  $(0,0)$  y radio 1. Primero hay que darse cuenta que el disco de Poincaré es un abierto de  $\mathbb{R}^2$ . En ambos ejemplos nos fijamos en el centro, es decir, el punto  $(0,0) \in \mathbb{R}^2$  y  $(0,0) \in D$ . Los espacios tangentes en ese punto son:  $T_{(0,0)}\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$  y  $T_{(0,0)}D \cong \mathbb{R}^2$ . Además, en ambos tangentes podemos definir el producto escalar usual de  $\mathbb{R}^2$ . Sin embargo, también hay que recordar que los grupos que actúan son  $\mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$  y  $SO(2,1)$ , respectivamente en  $\mathbb{R}^2$  y  $D$ . Estos grupos son tan diferentes que las geometrías que producen en cada espacio son totalmente diferentes.

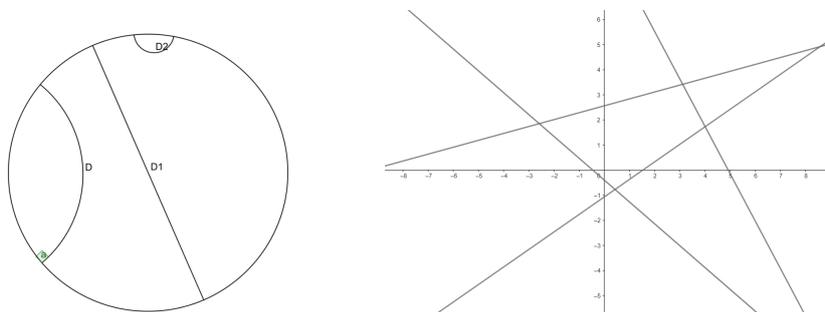


Figura 8: Geodésicas del disco de Poincaré y del plano.

La Figura 8 muestra que las curvas que minimizan la distancia en  $D$  y  $\mathbb{R}^2$  son totalmente diferentes, en el disco son las curvas mostradas en la primera imagen y en el plano son las rectas.

Los **espacios homogéneos** son una generalización de las superficies homogéneas para dimensiones arbitrarias.

## Introducción a la investigación de espacios homogéneos

Esta sección final está dedicada a responder la pregunta: ¿qué debo estudiar si quiero introducirme en la investigación en espacios homogéneos? De modo que, si alguien se siente inspirado por este resumen y le gustaría profundizar en el estudio de los espacios homogéneos tenga unas herramientas básicas donde profundizar.

En primer lugar debería afianzarse el conocimiento en variedades diferenciables y variedades de Riemann. Para ello, recomendaría los libros [2] y [3], en ese orden. A continuación es también necesario un conocimiento básico sobre grupos de Lie, por lo que recomendaría los primeros dos capítulos de [11]. Con estos conocimientos previos, ya seríamos capaces de entender los espacios homogéneos y sus utilidades, para lo que recomendaría el capítulo 11 del libro [7]. Para afianzar los conocimientos y profundizar mucho más, recomendaría los dos tomos del libro de Kobayashi y Nomizu [4] (estos libros son bastante más difíciles de leer).

## Bibliografía

- [1] Bart, A. y Clair, B., *Circle Limit Exploration*. Visitado en Octubre de 2022. Recurso: [https://mathstat.slu.edu/escher/index.php/Circle\\_Limit\\_Exploration](https://mathstat.slu.edu/escher/index.php/Circle_Limit_Exploration)
- [2] Do Carmo, M. P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall PTR.
- [3] Do Carmo, M. P. (1992). *Riemannian Geometry*, Birkhauser Boston Inc.
- [4] Kobayashi, S. and Nomizu, K. (1963,1969) *Foundations of Differential Geometry Vol. I, II*, John Wiley and Sons, New York.
- [5] Museumize.com, Tienda online de recuerdos de museos. Visitado en Octubre de 2022. URL:<https://www.museumize.com/>
- [6] Nelson, J. (2020). *Contact encounters in the third dimension*. Undergraduate Colloquium. Recurso: [https://math.rice.edu/~jkn3/0\\_riceUG.pdf](https://math.rice.edu/~jkn3/0_riceUG.pdf)
- [7] O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press.
- [8] Rao, M. (2017). *Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane*, pp. 16. ArXiv: <https://arxiv.org/pdf/1708.00274.pdf>
- [9] Sada, M. (2016). *Libro GeoGebra: Teselaciones de M. C. Escher*, GeoGebra. Recurso: <https://www.geogebra.org/m/dAqNKuXH>
- [10] Shmahalo O. (2017). *Representatives of the 15 families of convex pentagons that tile the plane*. Quanta Magazine. URL: <https://www.quantamagazine.org/pentagon-tiling-proof-solves-century-old-math-problem-20170711/>
- [11] Varadarajan, V. S. (1984). *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*, Springer, New York, NY.

## Falando de todo un pouco

Área de Análise Matemática

Mariña Canabal Juanatey

Universidade de Santiago de Compostela

1 de decembro de 2021

### Introdución

A presenza de sentenzas cuantificadas na linguaxe humana é continua e xoga un papel fundamental tanto a nivel de significado como de expresividade, sendo considerablemente frecuentes aquelas que inclúen termos vagos ou imprecisos. En calquera ámbito da vida cotiá atopamos expresións cuantificadas imprecisas como “máis ou menos a metade dos xogadores son altos”, “na maior parte dos concellos galegos a incidencia de coronavirus é baixa” ou o propio título deste traballo, “falando de todo un pouco”, que nos permiten resumir a información de forma que sexa máis comprensible para o cerebro humano.

Falaremos de **cuantificación borrosa** para referirmonos ao fenómeno da cuantificación lingüística en presenza da vaguidade propia da linguaxe natural. Para o seu modelado, que se converteu nun problema de grande interese en múltiples campos da intelixencia artificial, será necesario dispoñer dun procedemento formal que nos permita avaliar a veracidade dunha sentenza cuantificada, aínda cando esta inclúa termos imprecisos. Denominaremos a estes procedementos **modelos de cuantificación borrosa**, cuxo comportamento está caracterizado polo cumprimento ou non de certas propiedades matemáticas (a continuidade, a monotonía, etc.).

### Preliminares

Na Teoría de Conxuntos, o concepto intuitivo de conxunto, que aquí denominaremos **conxunto nítido** é o dunha colección de obxectos tales que a súa pertenza a el está totalmente determinada. No caso de considerar subconxuntos dun conxunto total (ou **universo do discurso**)  $X$ , os conxuntos nítidos están caracterizados pola súa **función característica**, que pode tomar unicamente os valores 0 ou 1.

En contraposición a esta noción clara de pertenza, na linguaxe natural atopamos con frecuencia certa ambigüidade á hora de decidir se un elemento pertence ou non a un conxunto. Para permitir expresar esta incerteza, Lofti A. Zadeh introduciu o concepto de **conxunto borroso** dun universo do discurso [4] como unha xeneralización dos conxuntos nítidos, estendendo a función característica para que poida tomar calquera valor en  $[0, 1]$ .

**Definición 1.** Un *conxunto borroso*  $\tilde{A}$  do universo do discurso  $X$  é un conxunto nítido de pares ordenados:  $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$ , onde  $\mu_{\tilde{A}}$  é unha función,  $\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0, 1]$ .

O valor  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  denota o **grao de pertenza** de  $x$  ao conxunto borroso  $\tilde{A}$ . Canto máis preto estea este valor de 1, máis clara será a pertenza de  $x$  a  $\tilde{A}$ .

Para ilustrar este novo concepto, pensemos nas cualidades de ser unha persoa de estatura alta, media ou baixa, para as cales parece difícil establecer uns límites precisos. Entón, poderíamos representalas mediante os conxuntos borrosos  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  e  $\tilde{D}$ , respectivamente, utilizando as funcións de pertenza da Figura 1.

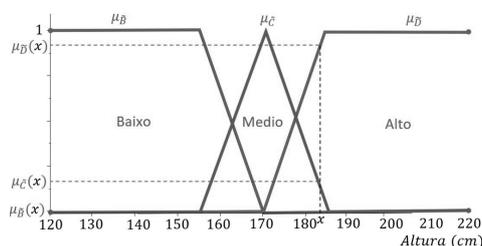


Figura 1: Gráficas das funcións de pertenza dos conxuntos borrosos  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  e  $\tilde{D}$ .

## Operacións entre conxuntos borrosos

Na Teoría de Conxuntos defínense tres operacións fundamentais: intersección, unión e complementario. É posible xeneralizalas para o caso dos conxuntos borrosos mediante a familia das  $T$ -normas,  $T$ -conormas e negacións estritas, respectivamente.

**Definición 2.** Unha  **$T$ -norma** é unha función  $T: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  conmutativa, asociativa e monótona crecente tal que  $T(x, 1) = T(1, x) = x$  para todo  $x \in [0, 1]$ .

**Definición 3.** Unha  **$T$ -conorma** é unha función  $C: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  conmutativa, asociativa e monótona crecente tal que  $C(x, 0) = C(0, x) = x$  para todo  $x \in [0, 1]$ .

**Definición 4.** Unha **negación estrita** é unha función  $N: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  monótona decrecente, involutiva e que cumpre as condicións de fronteira  $N(0) = 1$  e  $N(1) = 0$ .

As operacións máis habituais para estas familias, as mesmas que considera Zadeh en [4], son  $T(x, y) = \min\{x, y\}$  como  $T$ -norma,  $C(x, y) = \max\{x, y\}$  como  $T$ -conorma e a función  $N(x) = 1 - x$  como negación estrita.

**Definición 5.** Dados dous conxuntos borrosos  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  do universo do discurso  $X$ , definimos a súa **intersección**,  $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ , a súa **unión**,  $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ , e o **complementario** de  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{A}_C$ , mediante os conxuntos borrosos dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) &= T(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in X, \\ \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) &= C(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in X, \\ \mu_{\tilde{A}_C}(x) &= N(\mu_{\tilde{A}}(x)), \forall x \in X,\end{aligned}$$

onde  $T$  é unha  $T$ -norma,  $C$  unha  $T$ -conorma e  $N$  unha negación estrita.

## Modelos de cuantificación e as súas definicións

Pódese considerar que foi Lofti Zadeh o primeiro en abordar o modelado da cuantificación borrosa utilizando a súa Teoría de Conxuntos Borrosos [5]. Para ilustrar este proceso de modelado, pensemos nunha frase como a seguinte: “Gran parte dos bos estudantes de matemáticas son altos”. “Gran parte” é o **cuantificador** da sentenza, que Zadeh propuxo identificar cun conxunto borroso definido nun intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Por simplicidade, aquí consideraremos só cuantificadores relativos, os cales representan cantidades en relación a un total. Tamén atopamos o conxunto (nítido) de elementos ao que fai referencia o cuantificador, o **conxunto referencial**,  $E$ , composto polos estudantes de matemáticas. Finalmente, identificaremos as cualidades que a sentenza afirma que existen no referencial, denominadas **argumentos**, tamén mediante conxuntos borrosos. Neste caso, os argumentos son as cualidades de ser unha persoa alta e de ser bo estudante.

Os modelos de cuantificación son un método que nos permite combinar unha medida de cardinalidade dos argumentos da sentenza co conxunto borroso asociado ao cuantificador, dunha forma que sexa posible obter o grao de cumprimento da sentenza, que será un valor no intervalo  $[0,1]$ , de maneira que, canto máis preto de 1 estea, máis se axustará a sentenza á realidade dos datos.

Como vemos, seguindo esta aproximación proposta por Zadeh para o modelado da cuantificación, un concepto fundamental vai ser o do cardinal dun conxunto borroso, que non resulta tan intuitivo como o dun conxunto nítido. Como consecuencia, existen diferentes propostas estendendo de distintas formas o cardinal clásico.

### O modelo de Zadeh

Imos centrarnos no modelo de cuantificación proposto polo mesmo Zadeh [5], que debido a súa sinxeleza e a súa reducida complexidade computacional é o máis coñecido e utilizado na práctica. Antes de introducilo, é necesario definir o cardinal no que se basea, o **sigma-count relativo**, que expresa a proporción de elementos dun conxunto borroso que se atopan noutro conxunto borroso.

**Definición 6.** Sexa  $E$  un universo do discurso e  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{D}$  conxuntos borrosos de  $E$ . Defínese o  $\Sigma$ -Count dun conxunto borroso como a suma dos graos de pertenza do conxunto, é dicir,

$$\Sigma\text{-Count}(\tilde{A}) = \sum_{e \in E} \mu_{\tilde{A}}(e).$$

O cardinal sigma-count relativo de  $\tilde{A}$  con respecto  $\tilde{D}$  defínese como

$$\Sigma\text{-Count}(\tilde{A}/\tilde{D}) := \frac{\Sigma\text{-Count}(\tilde{A} \cap \tilde{D})}{\Sigma\text{-Count}(\tilde{D})} = \frac{\sum_{e \in E} \min(\mu_{\tilde{A}}(e), \mu_{\tilde{D}}(e))}{\sum_{e \in E} \mu_{\tilde{D}}(e)}, \quad \text{se } \sum_{e \in E} \mu_{\tilde{D}}(e) \neq 0,$$

$$\Sigma\text{-Count}(\tilde{A}/\tilde{D}) = 0 \text{ se } \sum_{e \in E} \mu_{\tilde{D}}(e) = 0.$$

**Definición 7.** Dado un cuantificador  $Q$  e dous conxuntos borrosos  $\tilde{A}$  e  $\tilde{D}$ , definimos o **modelo de Zadeh** mediante a seguinte expresión:

$$\mathcal{Z}_Q(\tilde{A}/\tilde{D}) = \mu_Q \left( \Sigma\text{-Count}(\tilde{A}/\tilde{D}) \right).$$

### Propiedades desexables

Para poder avaliar o comportamento que presentan diferentes modelos, no sentido de que os resultados obtidos supoñan una interpretación coherente e apropiada dos datos descritos, propuxéronse unha serie de propiedades matemáticas que todo modelo debería satisfacer (véxase [1]). Algunhas delas representan casos nos que o resultado da avaliación se coñece intuitivamente, mentres que outras responden a requirimentos relacionados coa utilidade práctica dos modelos. A continuación, introducimos algunhas delas, considerando sempre que  $Q$  é o cuantificador da sentenza a avaliar e  $\tilde{A}$  e  $\tilde{D}$  os argumentos, todos eles representados mediante conxuntos borrosos.

**Definición 8.** Sexan  $A$  e  $D$  dous conxuntos nítidos tales que  $|D| \neq 0$ . Diremos que un modelo  $\Gamma$  cumpre a propiedade de **xeneralización correcta** se:

$$\Gamma_Q(A/D) = \mu_Q \left( \frac{|D \cap A|}{|D|} \right).$$

**Definición 9.** Sexan  $Q_1$  e  $Q_2$  dous cuantificadores tales que  $\mu_{Q_1}(x) \leq \mu_{Q_2}(x)$  para todo  $x \in I$ . Diremos que un modelo  $\Gamma$  cumpre a propiedade de **monotonía** se:

$$\Gamma_{Q_1}(\tilde{A}/\tilde{D}) \leq \Gamma_{Q_2}(\tilde{A}/\tilde{D}).$$

**Definición 10.** Sexa  $T$  unha  $T$ -norma e  $Q, Q^+, Q^-$  cuantificadores tales que:

$$\mu_Q(x) = T(\mu_{Q^+}(x), \mu_{Q^-}(x)) \text{ para todo } x \in [0, 1].$$

Diremos que un modelo  $\Gamma$  cumpre a propiedade de **descomposición** se:

$$\Gamma_Q(\tilde{A}/\tilde{D}) = T(\Gamma_{Q^+}(\tilde{A}/\tilde{D}), \Gamma_{Q^-}(\tilde{A}/\tilde{D})).$$

**Definición 11.** Diremos que o modelo  $\Gamma$  cumpre a propiedade de **continuidade** se, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $\tilde{A}'$  e  $\tilde{D}'$  conxuntos borrosos sobre  $E$ , se

$$d \left( (\tilde{A}, \tilde{D}), (\tilde{A}', \tilde{D}') \right) := \max \left( \max_{e \in E} |\mu_{\tilde{A}}(e) - \mu_{\tilde{A}'}(e)|, \max_{e \in E} |\mu_{\tilde{D}}(e) - \mu_{\tilde{D}'}(e)| \right) < \delta,$$

entón:

$$\left| \Gamma_Q(\tilde{A}/\tilde{D}) - \Gamma_Q(\tilde{A}'/\tilde{D}') \right| < \varepsilon.$$

As tres seguintes propiedades están relacionadas cun concepto lingüístico fundamental: a negación. Antes de introducilas é necesario dar as seguintes definicións.

**Definición 12.** Dado  $\tilde{A}$  un conxunto borroso do universo do discurso  $X = [a, b]$  e  $N$  unha negación estrita, definimos o seu complementario,  $\tilde{A}_C$ , o seu antónimo,  $\tilde{A}_{ant}$ , e o seu dual,  $\tilde{A}_{dual}$ , mediante as seguintes expresións:

- $\mu_{\tilde{A}_C}(x) = N(\mu_{\tilde{A}}(x))$ , para todo  $x \in X$ ,
- $\mu_{\tilde{A}_{ant}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(b - x)$ , para todo  $x \in X$ ,
- $\mu_{\tilde{A}_{dual}}(x) = \mu_{\tilde{A}_{C_{ant}}}(x) = N(\mu_{\tilde{A}}(b - x))$ , para todo  $x \in X$ .

**Definición 13.** Se  $N$  é unha negación estrita, diremos que o modelo  $\Gamma$  cumpre a propiedade de

- **negación externa** se  $\Gamma_Q(\tilde{A}/\tilde{D}) = N(\Gamma_{Q_C}(\tilde{A}/\tilde{D}))$ .
- **negación interna ou antonimia** se  $\Gamma_Q(\tilde{A}/\tilde{D}) = \Gamma_{Q_{ant}}(\tilde{A}_C/\tilde{D})$ .
- **dualidade** se  $\Gamma_{Q_{ant}}(\tilde{A}_C/\tilde{D}) = N(\Gamma_{Q_C}(\tilde{A}/\tilde{D}))$ .

É sinxelo probar que o modelo de Zadeh satisfai a xeneralización correcta, a monotonía e a descomposición utilizando a definición do modelo. En xeral, a propiedade de continuidade non se cumpre. En canto ás propiedades de negación, a negación externa satisfaise no modelo de Zadeh, pero non a antonimia nin a dualidade.

Ademais, o modelo de Zadeh presenta un problema adicional derivado de utilizar o cardinal  $\Sigma$ -Count, o coñecido como **efecto acumulativo** [2], que pode provocar que moitos graos de pertenza baixos alcancen o mesmo valor que só uns poucos graos de pertenza altos, obtendo o mesmo resultado en dúas situacións totalmente diferentes.

## Estudo empírico

A pesar dos problemas evidenciados na sección anterior, non atopamos estudos concluíntes sobre o impacto que podería ter na práctica o uso dun modelo que presentase estas deficiencias a nivel teórico. Entón, centrándonos no incumprimento da antonimia e o efecto acumulativo, realizamos un estudo empírico que mostrara o posible impacto destes defectos teóricos no comportamento do modelo de Zadeh durante a interacción entre un axente conversacional e os seus usuarios.

Con este obxectivo construímos **Quanversa**<sup>1</sup>, un prototipo de axente conversacional deseñado para facer recomendacións segundo a información meteorolóxica dispoñible e que manexa expresións lingüísticas cuantificadas mediante modelos de cuantificación borrosa. En particular, o axente dispón do modelo de Zadeh e dun modelo que propuxemos para o noso traballo [2], o cal inclúe as modificacións imprescindibles no modelo de Zadeh para superar os dous problemas mencionados no ámbito de aplicación do axente.

<sup>1</sup><https://demos.citius.usc.es/quanversa/>

Con conversacións entre **Quanversa** e usuarios, realizamos un estudo empírico [2], cuxo punto de partida era a seguinte hipótese de investigación: “A interacción cun axente conversacional resulta máis consistente e de maior utilidade para os usuarios cando este agrega os datos mediante o modelo de Zadeh modificado que cando o fai co modelo de Zadeh orixinal”. Para tratar de validala, deseñamos un cuestionario que permitía que os participantes valorasen a consistencia e a utilidade dunha serie de conversacións reais entre o axente e un usuario. A aplicación do test non paramétrico de McNemar, xunto cunha análise descritiva dos resultados obtidos, permitiunos validar a hipótese proposta.

## Conclusións e posibles ampliacións

A realidade é que ningún modelo de cuantificación deseñado seguindo a aproximación proposta por Zadeh pode cumprir todas as propiedades desexables, debido a que os conxuntos borrosos xunto coas súas operacións non presentan unha estrutura de Álgebra de Bool. Isto pode provocar comportamentos incorrectos en determinadas situacións que é importante ter en conta á hora de utilizalos na práctica.

De feito, comprobamos [2] dende unha perspectiva pragmática que os usuarios perciben os problemas derivados do incumprimento da antonimia e o efecto acumulativo no modelo de Zadeh durante a interacción cun axente conversacional.

A imposibilidade destes modelos de cumprir todas as propiedades simultaneamente, impulsou a definición de novos marcos de estudo para a cuantificación borrosa. Destaca a Teoría de Representación por Niveis [3], desenvolvida moi recentemente, que se trata dunha alternativa á Teoría de Conxuntos Borrosos para a representación da vaguidade que permite definir mecanismos que si verifican todas as propiedades matemáticas desexables.

## Bibliografía

- [1] Barro S., Bugarín A. J., Cariñena P. e Díaz-Hermida F. (2003). *A Framework for Fuzzy Quantification Models Analysis*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, **11**(1), pp. 89–99.
- [2] Canabal-Juanatey M., Alonso-Moral J. M., Catala A. e Bugarín-Diz A (2021). *Evaluación empírica de modelos de cuantificación borrosa aplicados a un agente conversacional*, in Proceedings of XX Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy, Málaga, España, pp. 298–304.
- [3] Ruiz M. D., Sánchez D. e Delgado M. (2018). *Level-based fuzzy generalized quantification*, Fuzzy Sets and Systems, **345**, pp. 24–40.
- [4] Zadeh, L. A. (1965). *Fuzzy Sets*, Information And Control, **8**, pp. 338–353.
- [5] Zadeh, L. A. (1983). *A Computational Approach to Fuzzy Quantifiers in Natural Languages*, Computers & Mathematics with Applications, **9**(1), pp. 149–184.

## Método de cuadratura de convolución

Área de Matemática Aplicada

Miguel Picos Maiztegui

Universidad de Santiago de Compostela

15 de diciembre de 2021

### Introducción

Se presentará el método de cuadratura de convolución para aproximar integrales de convolución. Se aproximará la convolución entre dos funciones  $f$  y  $g$  mediante una convolución discreta con los valores de  $g$  sobre una malla. Los pesos de cuadratura se determinan mediante la transformada de Laplace de la función  $f$  (función llamada con frecuencia el núcleo de convolución), un integrador de tipo Runge-Kutta y la fórmula integral de Cauchy. Se seguirán los pasos presentados en [1] y [2] para métodos lineales multipaso y en [3] para Runge-Kutta. Finalmente se mostrarán resultados sobre problemas sencillos.

### Desarrollo del método

Queremos resolver la siguiente integral de convolución:

$$y(t) = f * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau.$$

Para ello, tomaremos una malla uniforme en tiempo de parámetro  $h$  de modo que  $t_i = ih$  y buscaremos una fórmula de aproximación de tipo convolución discreta:

$$y(t_{n+1}) \approx y_{n+1} = b^T A^{-1} \sum_{k=0}^n W_{n-k}^h(\hat{f})g_k.$$

Generalmente conoceremos la transformada de Laplace  $\hat{f}(s)$  de la función  $f$  y no la propia función, de modo que tomaremos como datos del problema las funciones  $g(t)$  y  $\hat{f}(s)$ , llegando al siguiente problema:

$$y(t) = f * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \hat{f}(s)ds,$$

donde, introduciendo la expresión de  $f(t)$  en función de su Transformada de Laplace, se obtiene

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) \left( e^{st} \int_0^t e^{-s\tau} g(\tau) d\tau \right) ds.$$

Podemos reescribir la expresión como:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) x_s(t) ds,$$

donde  $x_s(t) = e^{st} \int_0^t e^{-s\tau} g(\tau) d\tau$  es solución del problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} x'(t) &= sx(t) + g(t), \\ x(0) &= 0. \end{aligned}$$

El siguiente paso será utilizar un integrador numérico para aproximar la solución  $x_s(t)$ . Históricamente, se comenzó utilizando métodos lineales multipaso. En este trabajo utilizaremos métodos de tipo Runge-Kutta. Esto se debe a que, en ciertos problemas, son necesarios métodos A-estables y no existen métodos lineales multipaso A-estables de ordenes mayores que 2. Como contrapartida deberemos realizar cálculos con matrices en lugar de con escalares como pasa en el caso de métodos lineales multipaso.

Dado un integrador de tipo Runge-Kutta, representado por su tabla de Butcher:

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

Para resolver la EDO  $x'(t) = f(t, x)$ , definimos  $t_{n,i} := t_n + c_i h$  de modo que expresamos cada paso del método como:

$$\begin{aligned} x_{n,i} &= x_n + h \sum_{j=1}^m a_{ij} f(t_{n,j}, x_{n,j}), \quad i = 1, \dots, m, \\ x_{n+1} &= x_n + h \sum_{i=1}^m b_i f(t_{n,i}, x_{n,i}). \end{aligned}$$

Para el uso del integrador Runge-Kutta en nuestro método, necesitamos que se cumplan las siguientes condiciones:

- La matriz  $A$  es no singular.
- El método Runge-Kutta es A-estable.
- El método cumple que  $b^T A^{-1} \vec{1} = 1$ .

Una condición suficiente para  $b^T A^{-1} \vec{1} = 1$  es que el método sea rígidamente preciso.

Introducimos la aproximación de  $x(t)$  por un método Runge-Kutta que cumple las condiciones anteriores, obteniendo

$$y_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) x_n ds \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Realizaremos una transformada  $Z$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} z^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) \left( \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} z^n \right) ds.$$

Buscaremos expresar  $\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} z^n$  en función de los datos. Si particularizamos, para la EDO que queremos resolver, la expresión del método Runge-Kutta y operando para simplificar las expresiones obtenidas se llega a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} z^n = b^T A^{-1} \left( \frac{\Delta(z)}{h} - sI \right)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n,$$

$$\Delta(z) = A^{-1} - zA^{-1} \vec{1} b^T A^{-1}.$$

Utilizando el resultado anterior, obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) b^T A^{-1} \left( \frac{\Delta(z)}{h} - sI \right)^{-1} g_n ds \right) z^n.$$

Buscaremos transformar esta expresión en:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^m \beta_k \alpha_j \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) \left[ (D - sI)^{-1} \right]_{kj} ds \right) z^n,$$

de modo que los términos del interior de las integrales sean escalares, por lo que podremos utilizar el Teorema de Cauchy.

Por simplicidad vamos a suponer que  $\Delta(z)/h = L_z D_z L_z^{-1}$  es una matriz diagonalizable, y tomamos la descomposición en la base canónica:

$$L_z^{-1} g_n = \sum_{j=1}^m \alpha_j e_j, \quad (b^T A^{-1} L_z)^T = \sum_{k=1}^m \beta_k e_k.$$

Podemos reescribir la expresión  $b^T A^{-1} \left( \frac{\Delta(z)}{h} - sI \right)^{-1} g_n$ , llegando a:

$$\sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^m \beta_k \alpha_j \left[ (D_{z,h} - sI)^{-1} \right]_{kj}.$$

Como  $D_{z,h} - sI$  tiene estructura diagonal podemos calcular explícitamente su inversa

$$[(D_{z,h} - sI)^{-1}]_{kj} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_k - s} & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde  $\lambda_j$  es el elemento de la posición  $jj$  de la matriz  $D_{z,h}$ .

Introduciendo esta expresión en la integral de convolución:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^m \beta_k \alpha_j \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(s) [(D - sI)^{-1}]_{kj} ds \right) z^n.$$

Dada la sucesión de curvas  $\phi_n$  formadas por  $-\phi_{n,1}$  y  $\phi_{n,2}$ , siendo:

$$\phi_{n,1}(t) = c + it, \quad \phi_{n,2}(t) = c + ne^{it}.$$

Tenemos que, por el teorema de Cauchy:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi_n} \frac{\hat{f}(s)}{s - \lambda} ds.$$

Tomando límites podemos calcular las integrales que estábamos buscando.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\hat{f}(s)}{\lambda - s} ds = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \rightarrow \infty} - \int_{\phi_{n,2}} \frac{\hat{f}(s)}{s - \lambda} ds + \int_{\phi_{n,1}} \frac{\hat{f}(s)}{s - \lambda} ds = \hat{f}(\lambda),$$

ya que el límite de las integrales sobre las curvas  $\phi_{n,2}$  es 0, pues la función  $\hat{f}(s)$  está acotada cuando la parte real de  $s$  tiende a infinito por ser una transformada de Laplace.

Para simplificar la notación, definimos a partir de  $\hat{f}(s)$  una función matricial  $\hat{f}: A \in \mathbb{M}_{m \times m}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{M}_{m \times m}(\mathbb{C})$  tal que:

$$\hat{f}(A) := L_A \hat{D}_A L_A^{-1}.$$

$$[\hat{D}_A]_{kj} := \begin{cases} \hat{f}([D_A]_{kj}) & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con lo que reescribimos las series de potencias en función de  $\hat{f}$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b^T A^{-1} \hat{f} \left( \frac{\Delta(z)}{h} \right) g_n z^n.$$

Calcularemos la serie de potencias de  $\hat{f} \left( \frac{\Delta(z)}{h} \right)$  utilizando el teorema de Cauchy y una aproximación por el método de los trapecios:

$$\hat{f} \left( \frac{\Delta(z)}{h} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n^h(\hat{f}) z^n,$$

$$\left[ W_n^h(\hat{f}) \right]_{kj} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{\left[ \hat{f} \left( \frac{\Delta(z)}{h} \right) \right]_{kj}}{z^{n+1}} dz,$$

$$W_n^h(\hat{f}) \approx \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{f} \left( \frac{\Delta(Re^{it})}{h} \right) C^{nl} \text{ siendo } C = e^{\frac{i2\pi}{L}}.$$

Esta aproximación tiene orden exponencial y por lo tanto no debería afectar al orden global del método.

Finalmente, utilizando la formula de Cauchy para sumas infinitas llegamos a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( b^T A^{-1} \sum_{k=0}^n W_{n-k}^h(\hat{f}) g_k \right) z^n.$$

De modo que igualando términos de la serie de potencias obtenemos la expresión general del método:

$$y_{n+1} = b^T A^{-1} \sum_{k=0}^n W_{n-k}^h(\hat{f}) g_k,$$

$$W_n^h(\hat{f}) \approx \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{f} \left( \frac{\Delta(Re^{it})}{h} \right) C^{nl} \text{ siendo } C = e^{\frac{i2\pi}{L}}.$$

## Resultados numéricos

Para las pruebas numéricas utilizaremos los métodos Runge-Kutta A-estables y rígidamente precisos siguientes:

- Radau IIA de 2 etapas (orden 3).
- Lobato IIIC de 2 etapas (orden 2).
- Radau IIA de 3 etapas (orden 5).
- Lobato IIIC de 3 etapas (orden 4).

Resolveremos el siguiente test académico, que tiene relevancia en el contexto de las ecuaciones de ondas transitorias. Sea  $g(t)$  la función constante igual a 1. Resolveremos el problema cuya solución exacta es una función escalón:

$$\delta(t-1) * g(t) = \int_0^t \delta(t-\tau-1) g(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

En la Figura 1 podemos ver los resultados. Se puede apreciar cómo los métodos con mayor orden de convergencia proporcionan resultados más precisos, así como perturbaciones más pequeñas en las proximidades del salto.

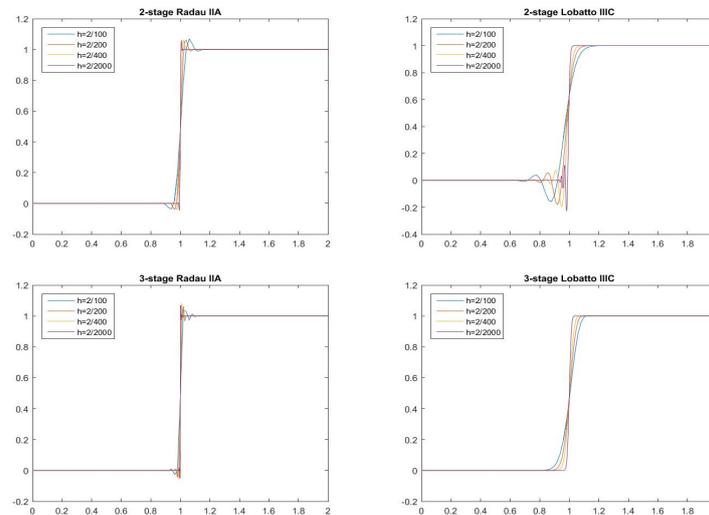


Figura 1: Resultado utilizando métodos rígidamente precisos.

## Conclusiones y Continuación

- El método de cuadratura de convolución basado en integradores de tipo Runge-Kutta presenta ventajas con respecto a los basados en métodos lineales multipaso en casos que necesitemos A-estabilidad.
- Se han obtenido resultados numéricos aceptables, obteniendo un orden de convergencia cercano al orden del esquema Runge-Kutta utilizado.
- Sería necesario realizar un análisis numérico completo del método para poder confirmar las hipótesis que podemos realizar con los resultados numéricos.
- Parece que con una buena elección de los parámetros de discretización  $R$  y  $L$  no intervienen en el orden. Sería necesaria un estudio más profundo para poder confirmarlo.

## Bibliografía

- [1] Lubich, C. (1988) *Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus I.*, Numer. Math. 52,129-145 (1988)
- [2] Lubich, C. (1988) *Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus II.*, Numer. Math. 52, 413-425 (1988)
- [3] Banjai, L., Messner, M., Schanz, M. (2012) *Runge-Kutta convolution quadrature for the Boundary Element Method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **245** 90-101

## ¿Qué son los esquemas?

Área de Álgebra

Saúl Estévez Cuntín

Universidade de Santiago de Compostela

2 de febrero de 2022

### Introducción

La Geometría Algebraica tiene su origen en el estudio de los objetos geométricos que anulan polinomios en varias variables, esto es, de los conjuntos algebraicos. En este trabajo  $k$  será un cuerpo algebraicamente cerrado y  $\mathbb{A}^n$  el  $n$ -espacio afín sobre  $k$ .

**Definición 1.** Un *conjunto algebraico afín* es un conjunto de puntos del espacio afín  $\mathbb{A}^n$  que se anulan para todos los polinomios de un ideal  $\mathfrak{a} \triangleleft k[x_1 \dots, x_n]$ .

El conjunto algebraico afín asociado al ideal  $\mathfrak{a} \triangleleft k[x_1 \dots, x_n]$  es:

$$v(\mathfrak{a}) = \{P \in \mathbb{A}^n \mid f(P) = 0 \forall f \in \mathfrak{a}\}$$

Tomando como cerrados estos conjuntos se tiene una topología, llamada la topología de Zariski en  $\mathbb{A}^n$ .

**Definición 2.** El *ideal asociado* a un conjunto algebraico afín  $Y$  es el conjunto de polinomios que se anulan en él,

$$i(Y) = \{f \in k[x_1 \dots, x_n] \mid f(P) = 0, \forall P \in Y\}.$$

**Definición 3.** El *radical* de un ideal  $\mathfrak{a}$  se define como  $\text{rad}(\mathfrak{a}) = \{f \mid f^r \in \mathfrak{a}, r \in \mathbb{N}\}$ . Cuando  $\mathfrak{a} = \text{rad}(\mathfrak{a})$ , se dice que el ideal  $\mathfrak{a}$  es un *ideal radical*.

Por ejemplo, en  $k[x]$ ,  $\text{rad}(\langle x^2 \rangle) = \langle x \rangle$ .

**Teorema 1** (Teorema de los ceros de Hilbert). Para todo ideal  $\mathfrak{a} \triangleleft k[x_1 \dots, x_n]$ , se verifica que  $i(v(\mathfrak{a})) = \text{rad}(\mathfrak{a})$ . Esto es, el ideal asociado a un conjunto algebraico afín es un ideal radical.

**Corolario 1.** Existe una correspondencia biunívoca, dada por  $v$  e  $i$  entre:

<u>En <math>k[x_1 \dots, x_n]</math></u>	<u>En <math>\mathbb{A}^n</math></u>
Ideales radicales	Conjuntos algebraicos afines
Ideales primos	Conjuntos algebraicos afines irreducibles
Ideales maximales	Puntos

PALABRAS CLAVE: esquemas afines; esquemas; haces; anillos; espacio localmente anillado.

De esta manera, tenemos un diccionario álgebra-geométrico, que nos permite relacionar ciertos ideales del anillo de polinomios con subconjuntos algebraicos de  $\mathbb{A}^n$  y traducir propiedades geométricas en algebraicas y viceversa.

**Definición 4.** Se define el **anillo de coordenadas** de un conjunto algebraico afín  $Y$  como

$$A[Y] := \frac{k[x_1, \dots, x_n]}{i(Y)} \cong \text{Hom}(Y, \mathbb{A}_k^1).$$

Estos anillos de coordenadas son  $k$ -álgebras de tipo finito reducidas (sin nilpotentes) y se tiene una correspondencia entre los **conjuntos algebraicos afines** sobre  $k$  y las  **$k$ -álgebras finitamente generadas reducidas**. A cada conjunto algebraico afín  $Y$  se le asocia su anillo de coordenadas  $A[Y]$ . Recíprocamente, cada  $k$ -álgebra de tipo finito reducida  $B$  se puede expresar como cociente del anillo de polinomios como sigue:

$$B = \frac{k[x_1, \dots, x_n]}{\mathfrak{a}},$$

para un cierto  $\mathfrak{a}$  radical, pudiéndosele asignar el conjunto algebraico  $v(\mathfrak{a})$ .

## Esquemas

En la Geometría Algebraica clásica, los conjuntos algebraicos afines sobre  $k$  no están definidos de manera intrínseca, sino que son subconjuntos de  $\mathbb{A}^n$  y están relacionados con ciertos anillos finitamente generados reducidos. Dado que el comportamiento de otros anillos como  $\mathbb{Z}$  o  $\mathbb{Z}[i]$  es similar al de estos anillos de coordenadas, sería interesante estudiar su geometría (de hecho, esto ha supuesto la base de una gran unificación entre teoría de números y geometría).

Por otra parte, si consideramos la intersección de la parábola  $y = x^2$  y la recta  $y = 0$  como conjuntos algebraicos, el anillo de coordenadas asociado a la intersección en Geometría Algebraica clásica sería

$$\frac{k[x]}{\langle x \rangle} = k.$$

Geoméricamente lo identificaríamos como un punto, pero de alguna forma estamos perdiendo información puesto que se trata de un punto doble. Al no considerar el anillo

$$\frac{k[x, y]}{\langle y - x^2, y \rangle} \simeq \frac{k[x]}{\langle x^2 \rangle}$$

no lo podemos distinguir de un punto ordinario.

Debido a estas ideas, entre otras, se plantea la conveniencia de trabajar con anillos conmutativos unitarios, en vez de con  $k$ -álgebras de tipo finito reducidas, y tratar de asociar a estos anillos cierta geometría. Esto motivó, a mediados del siglo XX, la introducción de la **teoría de esquemas** por Alexander Grothendieck.

**Definición 5.** *Un esquema es un espacio localmente anillado, localmente isomorfo a un esquema afín.*

Un **espacio localmente anillado** es un par  $(X, \mathcal{O}_X)$ , donde  $X$  es un espacio topológico,  $\mathcal{O}_X$  es un haz de anillos sobre  $X$ , que satisface que:

$$\mathcal{O}_{X,P} = \lim_{\rightarrow} \mathcal{O}_X(U) \text{ límite directo sobre entornos abiertos } U \text{ de } P,$$

llamado **tallo del haz estructural en el punto**  $P$ , es un anillo local (i.e. sólo tiene un único ideal maximal).

Intuitivamente, un haz  $\mathcal{O}_X$  es un objeto matemático que nos da las buenas funciones en los abiertos del espacio geométrico. Pensemos en el haz de funciones continuas de un espacio topológico o bien en el haz de funciones diferenciables de una variedad diferenciable (que también es un espacio anillado). Para cada abierto  $U \subset X$  el conjunto de estas funciones,  $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_U) = \{g: U \rightarrow k\}$ , con la suma y multiplicación habituales, es un anillo conmutativo y unitario. El tallo del haz estructural se corresponde con la idea de gérmenes de funciones: el conjunto de las funciones definidas en el entorno de un punto  $P$  es un anillo local, donde el único maximal viene dado por las funciones anulándose en dicho punto, de manera que si  $f(P) \neq 0$ , entonces existe una inversa para  $f$  en un entorno de  $P$ .

Para entender qué es un esquema afín, primero introduciremos el espectro de un anillo.

**Definición 6.** *Dado un anillo conmutativo y unitario,  $A$ , consideremos:*

1. *El conjunto  $\text{Spec } A$  de los ideales primos de  $A$ :*

$$\text{Spec } A = \{\mathfrak{p} \triangleleft A \mid \mathfrak{p} \text{ ideal primo}\}.$$

2. *Tomando como cerrados los conjuntos de la forma  $v(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$ . se define una topología sobre  $\text{Spec } A$ : la topología de Zariski. Para este espacio topológico se tiene la siguiente base de abiertos:*

$$D(f) = \text{Spec } A \setminus v(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

3. *Definimos en  $\text{Spec } A$  el **haz estructural** o de funciones regulares,  $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ , que en los abiertos básicos  $D(f)$  es la localización del anillo en las potencias de  $f$ :*

$$\Gamma(D(f), \mathcal{O}_{\text{Spec } A}) = A_f = A[f^{-1}] = \left\{ \frac{g}{f^n} \mid f, g \in A, n \in \mathbb{N} \right\},$$

*es decir, el anillo de funciones racionales cuyo denominador son potencias de  $f$ , siendo las secciones globales el propio anillo:  $\Gamma(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A}) = A$ .*

**Definición 7.** *Un esquema afín es un espacio anillado isomorfo al espectro de un anillo  $(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$ .*

Como los esquemas afines están completamente caracterizados por sus anillos de secciones globales y localmente los esquemas son esquemas afines, localmente la Geometría Algebraica es Álgebra Conmutativa. Son dos facetas de la misma teoría.

### Conjuntos algebraicos afines

Veamos algunos ejemplos de esquemas afines. Empecemos retomando los conjuntos algebraicos afines que vimos en la introducción. Estos se asocian a los esquemas dados por el espectro del anillo de coordenadas de dicho conjunto algebraico, que recordemos era una  $k$ -álgebra finitamente generada y reducida

$$\text{Spec } A[Y] := \frac{k[x_1, \dots, x_n]}{i(Y)}$$

Recordemos que en la Geometría Algebraica Clásica había una correspondencia entre puntos geométricos e ideales maximales. Sin embargo, como los puntos del espectro se corresponden con todos los ideales primos del anillo, no sólo los ideales maximales, en el esquema afín vamos a tener “puntos” que no considerábamos como tal en el conjunto algebraico.

**Ejemplo 1.**  *$\text{Spec } k = \{\langle 0 \rangle\}$  es un único punto, ya que un cuerpo tiene un único ideal primo.*

**Ejemplo 2.** *La recta afín, como esquema, es el espectro del anillo de polinomios en una variable:*

$$\mathbb{A}_k^1 = \text{Spec } k[x] = \{\langle x - a \rangle \mid a \in k\} \cup \{\langle 0 \rangle\}.$$

Los ideales maximales  $\langle x - a \rangle$  son puntos cerrados, pues su clausura topológica es  $V(\langle x - a \rangle) = \langle x - a \rangle$ . Se corresponden con los puntos clásicos  $x = a$  de la recta afín, como cabía esperar. Pero tenemos además el punto  $\langle 0 \rangle$ , punto que no es cerrado, pero que es denso en  $\mathbb{A}_k^1$  pues claramente  $V(\langle 0 \rangle) = \mathbb{A}_k^1$ . El haz estructural de este esquema viene dado por cocientes de polinomios

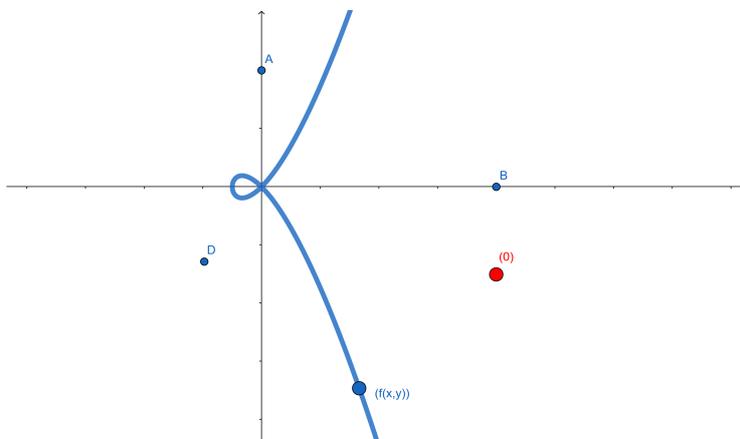
$$\Gamma(D(f), \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^1}) = k[x][f^{-1}] = \left\{ \frac{g(x)}{f(x)^n} \mid f, g \in k[x] \right\}.$$

**Ejemplo 3.** *El plano afín es el espectro del anillo de polinomios en dos variables:*

$$\mathbb{A}_k^2 = \text{Spec } k[x, y] = \{\langle x - a, y - b \rangle, \langle f \rangle \mid f \text{ irreducible}\} \cup \{\langle 0 \rangle\}.$$

Los ideales maximales  $\langle x - a, y - b \rangle$  son los puntos cerrados, que se corresponden con los puntos  $(a, b)$  ordinarios del plano. Los ideales primos principales  $\langle f \rangle$  son puntos no cerrados, que se corresponden geoméricamente con las curvas irreducibles del plano. El ideal primo  $\langle 0 \rangle$  nuevamente verifica que es denso en  $\mathbb{A}_k^2$ . El haz estructural en los abiertos básicos viene dado por funciones racionales:

$$\Gamma(D(f), \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2}) = k[x, y][f^{-1}] = \left\{ \frac{g(x, y)}{f(x, y)^n} \right\}.$$

Figura 1: Espectro de  $\mathbb{A}_k^2$ 

### Esquemas aritméticos

Los espectros de anillos finitamente generados sobre  $\mathbb{Z}$  se llaman esquemas aritméticos y surgen sobre todo en el contexto de la teoría de números. El más simple es el espectro de los números enteros, que viene dado por los ideales principales generados por un número primo y el ideal  $(0)$ :

$$\text{Spec } \mathbb{Z} = \{(0), (2), (3), (5), \dots\}$$

Los ideales generados por números primos son puntos cerrados, sin embargo el ideal  $(0)$  es denso pues  $v((0)) = \text{Spec } \mathbb{Z}$ . Un ejemplo de conjunto cerrado de este espacio es  $v((6)) = \{(2), (3)\}$ , cuyos elementos vienen dados por los ideales generados por los divisores primos de 6. El abierto básico complementario será entonces  $D((6)) = \text{Spec } \mathbb{Z} \setminus \{(2), (3)\}$  y el haz estructural de  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  en dicho abierto vendría dado por:

$$\mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}}(D((6))) = \left\{ \frac{m}{6^k}, m, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

En general, en este espacio los cerrados son de la forma  $v((n))$  para algún  $n \in \mathbb{Z}$  y están formados por los ideales generados por los divisores primos de  $n$ , que son puntos cerrados en  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ .

Figura 2: Espectro de  $\mathbb{Z}$

### Esquemas no afines

Los esquemas arbitrarios, localmente se asemejan a esquemas afines (como los abiertos de las variedades diferenciables a abiertos de  $\mathbb{R}^n$ ). Por tanto, un esquema admite un recubrimiento abierto  $X = \bigcup U_i$ , tal que los  $(U_i, \mathcal{O}_{X|U_i})$  son esquemas afines.

El espacio proyectivo  $\mathbb{P}_k^n$  es un ejemplo importante de esquema que no es afín, pero que se obtiene pegando esquemas afines. Sin entrar en detalles, el recubrimiento por abiertos afines viene dado por

$$U_i = \text{Spec } k \left[ \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right] \simeq \mathbb{A}_k^n,$$

donde  $\hat{x}_i$  significa que se omite dicha variable. En geometría elemental, es sabido que algunos problemas sólo se resuelven satisfactoriamente cuando consideramos el espacio proyectivo en vez del espacio afín.

### Bibliografía

- [1] Hartshorne, R. (1977): *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. **52**, Springer-Verlag.
- [2] Milne, J. (2015): *Algebraic Geometry* (v6.02), Disponible en [www.jmilne.org/math/](http://www.jmilne.org/math/).
- [3] Perrin, D. (1995): *Géométrie Algébrique, Une Introduction*. InterÉditions/CNRS Éditions, .
- [4] Görtz, U y Wedhorn, T. (2010): *Algebraic Geometry I: Schemes*, Springer Studium Mathematik-Master.
- [5] Eisenbud y D. Harris, J. (1999): *The Geometry of Schemes*, Graduate Texts in Math. **197**, Springer-Verlag.

## Técnicas de optimización para o deseño de instrumentos musicais

Área de Matemática Aplicada

Filipe Soares

Instituto Superior Técnico - Lisboa

16 de febreiro de 2022

### Introdución

Durante moitos anos, e aínda ata hoxe, o deseño e a construción de instrumentos musicais realízase na súa maioría por artesáns de forma empírica, a través de ensaio e erro. Hoxe en día, co aumento significativo da potencia computacional, os métodos de optimización eficientes e as técnicas de modelado físico máis precisas, hai un argumento convincente para reavaliar o deseño de moitos instrumentos utilizando un enfoque rigoroso, e evitando os procedementos a miúdo custosos e lentos. A optimización do deseño de instrumentos musicais pode depender dunha variedade de criterios (a miúdo complexos) como a afinación, a facilidade para tocar o instrumento (*playability*), a eficiencia da radiación acústica, etc. Un aspecto bastante sinxelo, aplicable a moitos instrumentos, é a optimización da forma das súas compoñentes de resonancia, de tal forma que as vibracións ocorren en frecuencias modais predefinidas. Neste traballo trataremos este aspecto en relación co caso dos instrumentos de percusión de mazo (xilófono, marimba, etc.) como exemplo ilustrativo de como certas ferramentas matemáticas poden axudar ao deseño de instrumentos musicais modernos. Os instrumentos de percusión tonal, como a marimba ou o vibráfono, están compostos por unha serie de barras afinadas que irradian son cando son golpeadas por un mazo. Un aspecto importante da entoación e da calidade tímbrica do instrumento está conectado coa relación entre as distintas frecuencias modais das barras. Nunha barra de sección transversal uniforme estas frecuencias non están relacionadas harmónicamente (múltiplos enteiros), unha característica común á maioría dos instrumentos tonais. Polo tanto, a afinación das barras adoita realizarse mediante un recorte na súa sección transversal, de modo que as súas frecuencias modais se aliñan harmónicamente, como se ilustra na Figura 1.

Algúns estudos foron publicados nos últimos anos sobre o deseño óptimo de barras utilizando varios enfoques de modelado e métodos de optimización [3, 4]. A pesar destes avances, a optimización da sintonía das barras abordouse considerando só os modos de flexión (vibracións unicamente verticais). Non obstante, algúns artigos [1] sinalaron a importancia dos modos de torsión (vibracións con compoñente vertical e lateral), que poden ter un efecto adverso significativo sobre o son

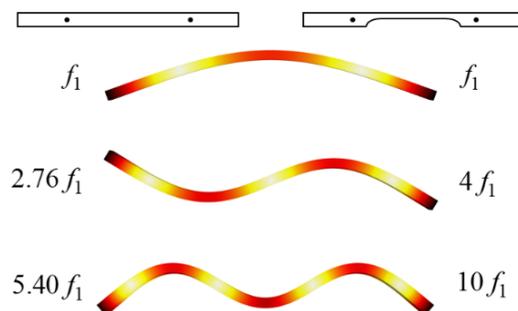


Figura 1: Tres modos de flexión máis baixos e relacións de frecuencia correspondentes nunha barra con sección transversal uniforme (esquerda) e unha barra cun corte tradicional (dereita).

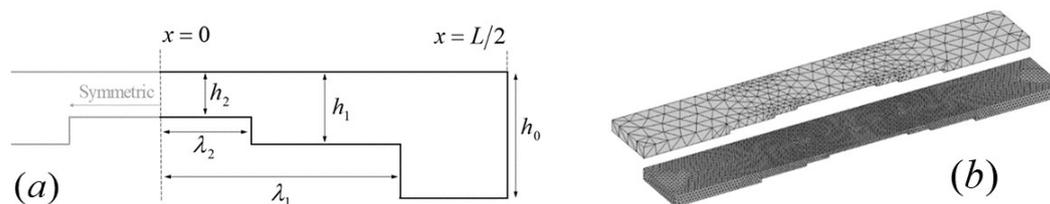


Figura 2: (a) Descrición esquemática do corte discontinuo con ; (b) Exemplo de mallado tetraédrico con representación diferente.

da barra. Ademais, o contexto musical require unha tolerancia moi baixa para os erros de afinación e os modelos 1-D frecuentemente non reproducen as frecuencias das barras reais dentro de tolerancias aceptables. En consecuencia, suxírese regularmente a necesidade de modelos de orde superior, con predicións de frecuencia máis precisas [4]. Aquí propoñemos o uso de modelos de elementos finitos 3D para: (1) permitir a posibilidade de sintonizar os modos de flexión e torsión a un conxunto de frecuencias predefinidas e (2) abordar o problema da precisión do modelo/afinación.

## Descrición do modelo

Un dos aspectos fundamentais para mellorar a converxencia do algoritmo de optimización é ter a menor cantidade de variables de deseño, co fin de xerar o espazo de parámetros máis reducido permitido. En traballos recentes [5], utilizouse unha forma de corte discontinua co obxectivo de aliviar a complexidade de fabricación. Esta definición de perfil proporciona, nun espazo de parámetros reducido, unha gran diversidade de xeometrías posibles. Considérese unha barra uniforme cunha lonxitude, ancho e alto determinados. A súa sección transversal é entón sometida a un corte simétrico que consiste nunha serie de cortes rectangulares, como se ilustra na Figura 2(a). O corte defínese entón polos  $2N$  graos de liberdade (onde están o número de cortes), é dicir, as súas lonxitudes  $\lambda_n$  e as alturas  $h_n$  asociadas. Esta

elección de xeometría leva a un conxunto de límites superior e inferior para cada variable:

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{N-1} \leq \lambda_N \leq L/2 \\ h_{\min} \leq h_n \leq h_0 \end{cases} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (1)$$

onde  $h_{\min}$  define a priori un espesor mínimo factible, motivado pola necesidade de integridade estrutural. Entón, o perfil da sección transversal descontinua vén dado por

$$H(x) = \begin{cases} h_n & \text{se } \lambda_{n+1} \leq \lambda_n \\ h_0 & \text{noutro caso,} \end{cases} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (2)$$

con  $\lambda_{N+1} = 0$ .

O cálculo das frecuencias modais para barras socavadas realizouse aquí mediante o modelado de elementos finitos en 3D. Para simplificar, considerouse un material isotrópico. A malla estaba composta por elementos tetraédricos non estruturados, eventualmente refinados en diferentes etapas do proceso de optimización. A Figura 2(b) mostra dúas mallas típicas con renderización baixa e alta. As ecuacións reitoras da elasticidade tridimensional, derivadas da lei de Hooke (ecuacións de Navier), finalmente conducen a un problema de autovalores xeneralizados:

$$([M] - \omega_n^2[K])\Psi_n = 0 \quad (3)$$

onde  $\omega_n$  e  $\Psi_n$  son as frecuencias naturais e as formas modais da barra, respectivamente.

## A función obxectivo

Para a sintonización de múltiples frecuencias modais a un conxunto de obxectivos predefinido, os problemas de optimización deben incluír as desviacións entre as frecuencias modeladas e as de destino. A aproximación máis sinxela e máis utilizada é definir unha única función de erro que describa todas as desviacións de frecuencia que se deben minimizar. Para as barras, unha función positiva definida e (numericamente) diferenciable deste tipo, que inclúe os modos de flexión e torsión, vén dada por:

$$\epsilon(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{h}) = \frac{100}{M + R} \left[ \sum_{m=1}^M \left( \frac{\bar{f}_{1,m}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{h}) - f_{1,m}^*}{f_{1,m}^*} \right)^2 + \sum_{r=1}^R \left( \frac{\bar{f}_{2,r}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{h}) - f_{2,r}^*}{f_{2,r}^*} \right)^2 \right], \quad (4)$$

onde  $f_{1,m}^*$  e  $\bar{f}_{1,m}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{h})$  son as frecuencias obxectivo e modelada dos modos de flexión, respectivamente; e  $f_{2,r}^*$  e  $\bar{f}_{2,r}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{h})$  os análogos para os modos de torsión;  $M$  e  $R$  son o número de obxectivos en cada caso.

## Métodos de optimización

O uso de modelos 3-D de elementos finitos (FE) esixe unha atención adicional nos métodos de optimización a utilizar xa que, ao contrario dos modelos FE 1-D máis simples, o problema de autovalores resultante asociado a unha barra de malla 3D é xeralmente custoso computacionalmente (1-10 segundos para cada avaliación de función). Ademais, dado que se sabe que a función obxectivo ten unha gran cantidade de mínimos locais subóptimos, o uso de esquemas típicos de optimización baseados en gradientes non é adecuado e os esquemas de optimización global son, en xeral, máis apropiados. Existe unha gran variedade de métodos de optimización global dispoñibles: algoritmos evolutivos, *simulated annealing*, colonia de formigas, etc. Non obstante, os métodos máis utilizados con frecuencia dependen dun gran número de avaliacións da función obxectivo. En consecuencia, dedícase atención aos esquemas de optimización globais que se consideran máis apropiados para funcións custosas, é dicir, aquelas que utilizan funcións de base radial, comunmente chamadas esquemas de optimización substitutos.

### Algoritmos de optimización de substitución

A esencia dos algoritmos de optimización de substitución baséase na creación dunha función (subrogada) que se aproxime á función obxectivo baseada nun esquema de interpolación utilizando só unhas poucas avaliacións de funcións. A función de substitución serve entón como guía para xerar solucións candidatas axeitadas. Unha vez avaliadas as novas solucións candidatas, calcúlase unha nova interpolación, actualizando a función substituta e xerando novas solucións candidatas de forma recursiva. Polo tanto, un algoritmo de optimización substituto alterna entre dúas etapas: (1) construción dun modelo substituto e (2) a busca dun mínimo usando a función substituta como guía. Aquí só se presenta un breve resumo dos procedementos implicados nun algoritmo de optimización substituto. Para unha descrición detallada, consúltese por exemplo [2]. Na fase inicial, o algoritmo avalía a función obxectivo  $f(x)$  en  $m$  puntos aleatorios  $\{x_1, \dots, x_m\}$  dentro do espazo de parámetros delimitado  $\mathbb{R}^N$ , dando como resultado os datos  $\{f_1, \dots, f_m\}$ . Despois, pódese formular unha función substituta  $s(x)$  que interpola os distintos pares de datos  $(x_m, f_m)$  definida mediante:

$$s(x) = \sum_{i=1}^m \beta_i \phi(\|x - x_i\|) \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (5)$$

onde  $\|\cdot\|$  denota a norma euclidiana en  $\mathbb{R}^N$ ;  $\beta_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 1, \dots, m$ , e  $\phi(r)$  é a función de base radial que se debe escoller (p. ex.  $\phi(r) = r^3$ ). En definitiva, este procedemento de interpolación redúcese a resolver un sistema linear de  $m$  ecuacións para os coeficientes  $\beta_i$ .

Unha vez que se calcula unha función substituta  $s(x)$ , o algoritmo busca novas solucións candidatas. As novas solucións candidatas escóllense en función de dous

criterios: (1) minimizar a función substituta e (2) situarse a unha distancia razoable dos puntos xa avaliados. Isto permite un equilibrio entre minimizar a función obxectivo e proporcionar unha busca robusta no espazo de parámetros. En resumo, o algoritmo xera miles de puntos de mostra (xa que a avaliación do substituto é computacionalmente barata) e escóllese unha nova solución candidata que minimize unha determinada función de *mérito*, dada por exemplo por

$$M(x) = \alpha S(x) + (1 - \alpha)D(x), \quad (6)$$

onde  $\alpha \in (0, 1)$  é un factor de ponderación;  $S(x)$  e  $D(x)$  son a función substituta normalizada e a distancia normalizada aos puntos avaliados previamente, dadas por:

$$S(x) = \frac{s(x) - s_{\min}}{s_{\max} - s_{\min}} \quad D(x) = \frac{d_{\max} - d(x)}{d_{\max} - d_{\min}}, \quad (7)$$

onde  $s_{\min}$  e  $s_{\max}$  son os valores substitutos mínimo e máximo entre os puntos mostrados, mentres que  $d_{\min}$  e  $d_{\max}$  son a distancia mínima e máxima entre o punto mostrado e un punto avaliado. Posteriormente, calcúlase o valor da función obxectivo para a nova solución candidata e o procedemento continúa repetidamente.

## Resultados

Usando o método de optimización descrito anteriormente, calculáronse varias xeometrías optimizadas para os cortes da barra, para varios conxuntos de frecuencias obxectivo. Algunhas destas formas optimizadas foron construídas e probadas experimentalmente, como se mostra na Figura 3. As barras foron feitas de aluminio e o corte fabricouse mediante unha fresadora CNC cunha tolerancia de erro estimada de  $\pm 0.05\text{mm}$ . Escolleuse a frecuencia base de forma que corresponda aproximadamente ao rexistro inferior dun vibráfono típico (175 Hz). En xeral, os resultados foron moi satisfactorios, con frecuencias medidas que non se desvían das frecuencias obxectivo en non máis de 15 cents (unidade musical que se usa habitualmente para medir a afinación). Estes resultados demostran a viabilidade do uso de métodos modernos para optimizar e fabricar barras dun xeito relativamente sinxelo e rápido. Ademais, hai que ter en conta que as barras presentadas aquí teñen seis modos de sintonía, mentres que as típicas só teñen dous ou tres.

En conclusión, presentamos un exemplo ilustrativo de como se poden utilizar ferramentas computacionais modernas no deseño de instrumentos musicais, a través da optimización da forma das súas compoñentes resonantes. No contexto dos instrumentos de percusión con mazo, demostrouse que as barras optimizadas poden sintonizar con precisión ata seis frecuencias, en lugar das dúas ou tres comúns. Ademais, as calidades tímbricas da barra non se limitan á relación de afinación tradicional (1 : 4 : 10), xa que se pode escoller calquera conxunto de frecuencias obxectivo. Isto permite aos fabricantes certa flexibilidade á hora de moldear o timbre do instrumento variando as súas relacións de afinación. Ademais, os resoadores acústicos tamén se optimizaron para ter modos acústicos sintonizados a un conxunto

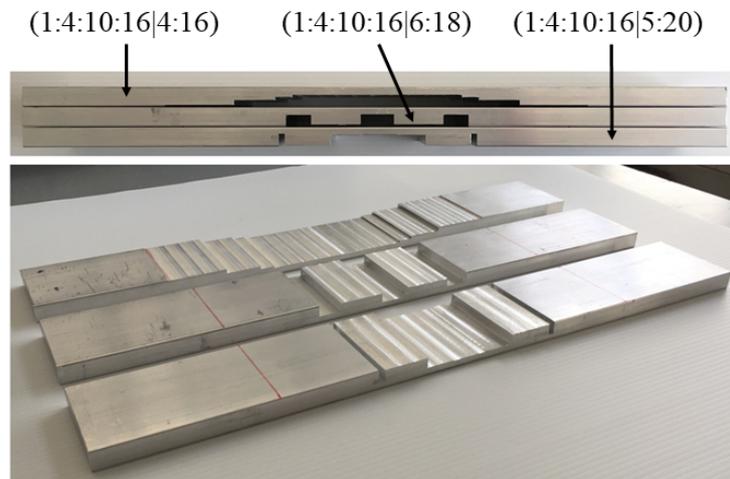


Figura 3: Barras de aluminio optimizadas. Para cada caso, móstranse as relacións de frecuencia obxectivo correspondentes, onde os dous últimos valores corresponden aos modos de torsión.

específico de frecuencias obxectivo. Isto podería aportar unha nova calidade a estes instrumentos, xa que agora podemos combinar múltiples frecuencias da barra cos distintos modos acústicos dos resoadores e xerar e aumentar a radiación acústica a múltiples frecuencias, en lugar de só a fundamental, como ocorre nos instrumentos tradicionais.

## Bibliografía

- [1] Bork I. (1995), *Practical tuning of xylophone bars and resonators*, Applied Acoustics, **46**, pp. 103–127.
- [2] Gutmann H., (2001). *A Radial Basis Function Method for Global Optimization*, Journal of Global Optimization, **19**, pp. 201-227.
- [3] Henrique L. e Antunes J. (2003). *Optimal design and physical modelling of mallet percussion instruments*, Acta Acustica, **89**, pp. 948–963.
- [4] Petrolito J. e Legge K. A. (1997). *Optimal undercuts for the tuning of percussive beams*, Journal of the Acoustical Society of America, **102**(4), pp. 2432–2436.
- [5] Soares F., Antunes J. e Debut V. (2021). *Tuning of bending and torsional modes of bars used in mallet percussion instruments*, Journal of the Acoustical Society of America, **150**(4), pp. 2757-2769.

## Ecuacións en modelos biolóxicos

Área de Análise Matemática

Sara Rodríguez Pastoriza

Universidade de Santiago de Compostela

9 de marzo de 2022

### Introdución

As matemáticas, se ben non curan enfermidades de forma directa, son unha ferramenta indispensable á hora de predecir e explicar cómo se propaga unha determinada enfermidade ou de qué forma se desenvolve un tipo de cancro.

A epidemioloxía é unha rama da medicina que estuda a incidencia de enfermidades infecciosas e o seu desenvolvemento sobre unha determinada poboación. Neste ámbito é importante coñecer as diferenzas entre unha epidemia e unha endemia.

Unha epidemia prodúcese cando unha enfermidade infecciosa se propaga rapidamente sobre unha poboación determinada, afectando simultaneamente a un gran número de persoas durante un período de tempo concreto. Algúns exemplos son o ébola ou a malaria. Por outra parte, o termo endemia fai referencia a presenza habitual dun axente infeccioso nunha determinada zona xeográfica ou poboación, é dicir, unha enfermidade que prevalece de maneira habitual nunha zona determinada. Este é o caso por exemplo de enfermidades como o sarampelo ou a sida. Cando unha epidemia se estende a distintos países recibe o nome de pandemia.

Desde a antigüidade, o ser humano viuse afectado por enfermidades de tipo infeccioso, que se expandían rapidamente e ameazaban con acabar coa vida de poboacións enteiras. É probable entón que o home formulara xa teorías acerca da natureza das enfermidades infecciosas desde moito tempo atrás, pero o primeiro escrito coñecido dun estudo matemático dunha enfermidade infecciosa, a varíola, foi publicado en 1760 por Daniel Bernoulli.

Non foi ata principios do século XX cando apareceron novos modelos matemáticos con máis trazos en común cos actuais, como o deseñado para predicir a enfermidade do sarampelo por W. H. Hamer en 1906 ou o creado por R. Ross sobre a malaria en 1902.

O que hoxe coñecemos como epidemioloxía moderna tivo orixe no ano 1927, co traballo realizado por W. O. Kermack e A. G. McKendrick, dous matemáticos que deseñaron o recoñecido modelo SIR. Este é considerado o modelo base e é de tipo compartimental, é dicir, clasifica aos individuos dunha determinada poboación en distintos grupos, dependendo da situación na que se atope cada individuo en

---

PALABRAS CLAVE: modelos epidemiolóxicos; ecuacións diferenciais; modelo SIR; modelo SEIR; enfermidade infecciosa;

relación á enfermidade. Tamén estableceron o que hoxe se coñece como o teorema umbral da epidemioloxía, que determina a priori se unha enfermidade é realmente unha ameaza para a poboación.

Desde este descubrimento propuxéronse e analizáronse numerosos modelos deseñados a partir de ecuacións diferenciais, cuxo obxectivo era describir a propagación de enfermidades provocadas por novos axentes infecciosos. Isto convertiu á modelización nunha ferramenta fundamental neste ámbito. Entre eles destacan os modelos SIS, SEIR, SIRS, SEIS, MSIR ou o SI, cuxos procesos de adaptación a cada un dos axentes infecciosos desencadearon a aparición de novos compartimentos e parámetros.

## Modelo SIR

### Introdución

Nesta sección introduciremos o primeiro modelo para estudar a evolución dunha epidemia deseñado por W. O. Kermack e A. G. McKendrick. Recibiu o nome de modelo SIR e deu inicio á epidemioloxía matemática moderna a finais do primeiro cuarto do século XX. O modelo divide á poboación en tres grupos:

- Susceptibles: individuos sans que poden ser contaxiados polos que portan a enfermidade, que é o segundo grupo que considera o modelo. Abreviadamente, identificarémolo por  $S$  de susceptibles.
- Infectados: individuos enfermos que poden transmitir a enfermidade. Identificarémolo por  $I$  de infectados.
- Recuperados: individuos que se recuperaron da enfermidade ou que faleceron a causa dela, é dicir, tanto os individuos que pasaron a enfermidade e xa non volverán a formar parte do grupo dos susceptibles como os que faleceron por culpa dela. Identificarémolo por  $R$  de recuperados.

Unha das hipóteses máis relevantes é que supón que o número  $N$  de individuos da poboación é constante, no sentido de que non se teñen en conta nin os nacementos nin as mortes que non foron causadas pola enfermidade no período de tempo durante o cal se desenvolve a infección; e a poboación é pechada, é dicir, tampouco se consideran as migracións (entrada e saída de individuos). Esta hipótese adáptase adecuadamente a situacións nas que a escala de tempo da enfermidade é moito máis rápida que a escala de tempo de nacementos e mortes alleas a ela, polo que podemos ignorar os efectos demográficos desta última sobre a poboación.

Está claro entón que

$$S + I + R = N \tag{1}$$

é dicir, a suma dos individuos de cada compartimento é o total.

O modelo representa a evolución da enfermidade a partir de dous fluxos de individuos: de susceptibles a infectados e de infectados a recuperados. Por un lado,

os individuos susceptibles pasarán a ser infectados en algún momento debido á capacidade destes últimos de transmitir a enfermidade. Por outro, os infectados que se recuperen ou que morran a causa dela pasarán a formar parte do grupo dos recuperados.

O modelo asume que un recuperado nunca volve a ser susceptible, é dicir, que tras pasar a enfermidade os individuos adquiren inmunidade.

A velocidade coa que se produza o paso de individuos dun compartimento a outro dependerá de dous parámetros que se adoitan denotar por  $\beta$  e  $\gamma$ .

O parámetro  $\beta$  representa a taxa de infección, é dicir, a probabilidade de que no contacto entre un susceptible e un infectado, o susceptible se contaxie da enfermidade. Tamén é coñecida como a probabilidade de contaxio e xoga un papel importante no paso de individuos do grupo dos susceptibles ao dos infectados, xa que determina a velocidade á que isto sucede. Depende maioritariamente da enfermidade e das medidas sanitarias de prevención establecidas. Na maioría dos casos non é sinxelo obter o seu valor.

O parámetro  $\gamma$ , coñecido como a taxa de recuperación, representa o número de individuos en promedio que se recuperan ou que morren a causa da enfermidade dentro do grupo de individuos infectados. Será un factor importante á hora de calcular a velocidade de paso de individuos do grupo de infectados ao de recuperados. A partir deste parámetro podemos definir o chamado período infeccioso como  $1/\gamma$ , que é o tempo no que o individuo infectado pode contaxiar a individuos susceptibles.

Todo o anterior podémolo esquematizar como aparece na Figura 1, que representa os tres compartimentos que considera este modelo, as direccións nas que os individuos pasan de formar parte dun grupo a formar parte doutro e os parámetros  $\beta$  e  $\gamma$ .

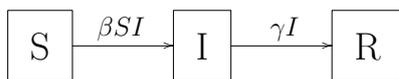


Figura 1: Diagrama representativo do modelo SIR epidémico.

## Formulación matemática

Seguiremos nesta sección o Capítulo 3.3 de [4] e o apartado *A Simple Epidemic Model* de [2]. Sexan  $S(t)$ ,  $I(t)$  y  $R(t)$  as tres funcións que representarán o número de individuos de cada grupo nun determinado instante  $t$ . A dinámica do SIR vén dada por tres ecuacións diferenciais que dan lugar ao seguinte sistema:

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t), \quad (2)$$

$$I'(t) = (\beta S(t) - \gamma)I(t), \quad (3)$$

$$R'(t) = \gamma I(t). \quad (4)$$

É sinxelo comprobar que a suma das ecuacións (2), (3) e (4) da cero, o cal ten sentido xa que  $S(t) + I(t) + R(t) = N$  e o modelo supón que  $N$  é constante. Xustificaremos

a continuación as ecuacións do modelo.

A derivada de  $S$ ,  $S'$ , representa a variación que se produce no grupo dos susceptibles e este cambio virá determinado polos que pasan a formar parte do grupo dos infectados.

O grupo de recuperados  $R$  só pode crecer xa que a medida que pase o tempo serán máis os infectados que pasen a enfermidade (incluíndo os que falecen a causa dela) e ningún dos recuperados volve ser susceptible, polo que a derivada de  $R$  é positiva.

O número de individuos que diminúa no grupo dos susceptibles aumentará no grupo dos infectados e o número de individuos que aumente no grupo de recuperados disminuirá no grupo de infectados.

## Análise do modelo

### Pico da infección

Para predicir como vai evolucionar a transmisión dunha enfermidade nunha determinada poboación é de interese estimar un valor coñecido como número reproductivo básico e denotado por  $R_0$ . É de gran utilidade para coñecer a priori un brote epidémico e preparar así unha resposta de prevención acorde á súa gravidade. Este novo concepto estará íntimamente ligado coa evolución do grupo de individuos infectados como veremos a continuación. Seguiremos o Capítulo 2 de [5] y a primeira parte do Capítulo 3 de [3].

Para estudar o crecemento e decrecemento da función  $I$ , determinaremos os seus puntos críticos igualando a súa derivada a cero e tendo en conta que  $I(0) > 0$  xa que, para que a enfermidade se propague, ten que haber como mínimo un individuo infectado no momento inicial. Atoparémonos con dúas situacións distintas dependendo de se  $S(0) < \gamma/\beta$  ou  $S(0) > \gamma/\beta$ .

- Se  $S(0) < \gamma/\beta$ , entón  $I'(0)$  é negativa. Como ademáis  $S$  é decrecente, cúmprese que  $S(t) < S(0) < \gamma/\beta$  para todo  $t > 0$ , polo que  $I'(t)$  é negativa para todo  $t > 0$ . En consecuencia a función  $I$  decrece ata que toma o valor 0 e entón non hai epidemia.
- Se  $S(0) > \gamma/\beta$ ,  $I$  primeiro crece ata un máximo alcanzado no instante  $t_0$  tal que  $S(t_0) = \gamma/\beta$ , é dicir, cando  $I'(t_0) = 0$ . Isto quere dicir que o número máximo de individuos infectados alcanzarase antes ou despois dependendo da probabilidade de contaxio e da taxa de recuperación da enfermidade que estemos estudando. O máximo de  $I$  será coñecido como o pico da infección e atoparémonos ante unha epidemia.

O valor  $\beta S(0)/\gamma$  é o que se coñece como a cantidade umbral, o valor que debe ser rebasado para que teña lugar un brote epidémico que afecte á poboación durante un período de tempo considerable. Para todos os modelos de epidemias (entre eles o

SIR) é precisamente o número reproductivo básico, que denotamos por  $R_0$ , é dicir,

$$R_0 = \frac{\beta S(0)}{\gamma}. \quad (5)$$

O parámetro  $R_0$  determinará a priori se a enfermidade é realmente unha ameaza para a poboación desencadeando unha epidemia, ou se, pola contra, desaparecerá nun período de tempo corto. Isto dependerá de se  $R_0 > 1$  ou  $R_0 < 1$ .

Cabe destacar que no caso no que  $R_0 > 1$  é habitual considerar  $r(t) = \beta S(t)/\gamma$ , que nos permite calcular o número reproductivo en cada instante  $t$ . Está claro que  $R_0$  se corresponde co valor da función  $r$  no instante inicial, é dicir,  $R_0 = r(0)$ , que é o que máis útil resulta para predicir a evolución a priori. Tendo en conta isto e considerando  $t_0$  o instante no que se alcanza o pico da infección, observamos que se cumpren as seguintes equivalencias:

$$\begin{cases} I'(t) > 0, & t \in (0, t_0), \\ I'(t) = 0, & t = t_0, \\ I'(t) < 0, & t \in (t_0, \infty). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S(t) > \frac{\gamma}{\beta}, & t \in (0, t_0), \\ S(t) = \frac{\gamma}{\beta}, & t = t_0, \\ S(t) < \frac{\gamma}{\beta}, & t \in (t_0, \infty). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(t) > 1, & t \in (0, t_0), \\ r(t) = 1, & t = t_0, \\ r(t) < 1, & t \in (t_0, \infty). \end{cases}$$

### Evolución da enfermidade a longo prazo

Por un lado, o grupo de individuos susceptibles vai diminuír ao longo do tempo, polo que o número máximo de individuos que alcanzará o grupo  $S$  será no momento inicial e por outro, o grupo de individuos recuperados aumentará ao longo do tempo, polo que a función  $R$  terá un mínimo en  $t = 0$ .

Logo temos que  $0 < S(t) < S(0) < N$  e  $0 = R(0) < R(t) < N$  para todo  $t > 0$  e isto implica que existen os límites  $\lim_{N \rightarrow \infty} S(t)$  e  $\lim_{N \rightarrow \infty} R(t)$ , que denotaremos por  $S(\infty)$  e  $R(\infty)$  respectivamente. Como consecuencia,  $I(\infty) = N - S(\infty) - R(\infty)$  tamén existe. Isto significa que o número de individuos en cada grupo se estabiliza ao longo do tempo.

Cabe destacar que neste caso a enfermidade acábbase extinguindo a longo prazo, é dicir,  $I(\infty) = 0$ .

### Solucións do modelo

Considerando a igualdade (1) e despxendo  $R$ , chegamos a que  $R = N - S - I$ , é dicir,  $R$  queda determinado a partir de  $S$  e  $I$ , polo que podemos simplificar o sistema inicial (2)-(4) de forma que queda con tan só dúas ecuacións diferenciais:

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t)I(t), \\ I'(t) &= (\beta S(t) - \gamma)I(t). \end{aligned}$$

Non podemos resolver este sistema analíticamente e coñecer a expresión das súas solucións, pero podemos obter moita información a partir da expresión das órbitas, a cal ven dada pola ecuación (6).

$$I(t) = -S(t) + S(0) + I(0) + \frac{\gamma}{\beta}(\ln S(t) - \ln S(0)). \quad (6)$$

## Modelos SEIR, SIS, SI e outros

Considerando como modelo base o modelo SIR, apareceron multitude de modelos compartimentais no ámbito da epidemioloxía cuxo obxectivo era unha mellor adaptación ás novas enfermidades infecciosas. Entre eles destacan o modelo SEIR, o cal parte do modelo SIR e considera a maiores un novo compartimento,  $E$ , no que se clasifican os individuos expostos. Estes individuos son os que se atopan nun período de incubación no que son portadores da enfermidade pero aínda non teñen a capacidade de transmitirla ao grupo dos susceptibles. En canto adquiran esta capacidade, pasarán a formar parte do grupo de infectados. Este modelo supón inmunidade ao igual que supoñía o SIR.

Tamén tiveron gran impacto os coñecidos como modelos SIS e SI, os cales eliminan o compartimento de individuos recuperados que consideraba o modelo SIR,  $R$ , supoñendo así que os individuos tras pasar a enfermidade poden volver a contaxiarse, é dicir, elimínase a suposición de inmunidade.

A diferenza entre eles é que o SIS está deseñado para situacións nas que o individuo pode volver a contaxiarse da enfermidade, mentras que no SI o individuo non volve a ser susceptible de novo. Este tipo de modelos adaptaciónse adecuadamente a enfermidades como o SIDA.

Outras adaptacións do modelo SIR son, entre outras, o modelo SIRS, que considera inmunidade temporal e o MSIR, que incorpora un novo compartimento  $M$  no que se clasifican os individuos que naceron recentemente e son inmunes á enfermidade durante un determinado período de tempo.

A importancia do modelo SIR no mundo da epidemioloxía refléxase en multitude de casos históricos de epidemia nos que resultou imprescindible para o control da situación. É por iso polo que apareceron multitude de modelos basados nel para a mellor adaptación a novas situacións de ameaza sobre unha determinada poboación.

## Bibliografía

- [1] Anonymous. (1978). *Influenza in a boarding school*, British Medical Journal, **1**.
- [2] Brauer, F., Castillo-Chávez, C. (2001). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Springer.
- [3] Brauer, F., Castillo-Chávez, C., Feng, Z. (2019). *Mathematical Models in Epidemiology*, Springer.
- [4] Britton, N. F. (2003). *Essential Mathematical Biology*, Springer.
- [5] Weiss, H. (2013). *The SIR model and the Foundations of Public Health*, Materials MATemàtics, **2013**, 1–17.

## Álxebras de Evolución e Grafos

Área de Álgebra

Andrés Pérez Rodríguez

Universidade de Santiago de Compostela

23 de marzo de 2022

### Introdución

Gregor Mendel foi un frade austríaco coñecido polos seus experimentos con plantas de chícharos e a consecuente formulación das leis xenéticas que levan o seu propio nome. Estas constitúen o conxunto de regras básicas para a transmisión da información xenética de proxenitores a descendentes. Aínda que Mendel xa empregou a linguaxe matemática para formular as súas leis, terían que pasar algunhas décadas ata que se introduciu a álgebra abstracta no estudo da xenética. Chegados a este punto, corrobórase que as álxebras non asociativas son o marco matemático apropiado para o estudo da herdanza no campo da xenética.

Non obstante, non tardaron en atoparse con situacións hereditarias que non respondían ante as leis de Mendel, como é o caso da bipartición nas células procariotas, a cal é un proceso de reprodución asexual. Aquí xorde a chamada xenética non mendeliana, considerada a día de hoxe como a linguaxe básica da bioloxía molecular, pero... as álxebras non asociativas funcionan igual de ben neste caso?

No ano 2006, J. P. Tian e P. Vojtěchovský responden afirmativamente a esta pregunta introducindo o concepto de álgebra de evolución en [3]. O noso obxectivo vai ser presentar as álxebras de evolución e amosar como a asociación dun digrafo nos permite estudar de maneira sinxela e gráfica algunhas das súas propiedades, sen esquecermos das interpretacións biolóxicas que se poden facer.

### Álxebras de evolución e digrafos asociados

As álxebras de evolución son un tipo de álxebras conmutativas e non asociativas que permiten modelar a herdanza non mendeliana.

**Definición 1.** *Unha álgebra de evolución  $\mathcal{E}$  sobre un corpo  $\mathbb{K}$  é unha  $\mathbb{K}$ -álgebra provista dunha base  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ , denominada **base natural**, tal que  $e_i e_j = 0$  se  $i \neq j$  e  $e_i^2 = e_i e_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} e_k$ . Fixada unha base natural  $B$  de  $\mathcal{E}$ , os escalares  $a_{ik} \in \mathbb{K}$  denomínanse **constantes de estrutura** e a matriz  $M_B = (a_{ik})$  que as recolle denomínase **matriz de estrutura**.*

---

PALABRAS CLAVE: álgebra de evolución; xenotipo; digrafo; descompoñibilidade; nilpotencia.

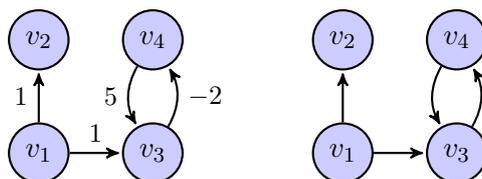
Biologicamente, se  $\mathcal{E}$  é unha álgebra de evolución con base  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ , os elementos  $e_i$  pódense interpretar como xenotipos. Polo tanto, se se ten que  $e_i^2 = \sum_{k=1}^n a_{ik} e_k$ , a constante de estrutura  $a_{ik}$  pódese interpretar como a probabilidade de que o xenotipo  $e_i$ , ao reproducirse, dea lugar ao xenotipo  $e_j$ . Non obstante, para poder facer estas interpretacións é necesario que  $0 \leq a_{ik} \leq 1$  e que  $\sum_{k=1}^n a_{ik} = 1$  para calquera  $i \in \{1, \dots, n\}$ . No sucesivo, sempre que se fagan interpretacións biolóxicas, estarase supoñendo que a matriz de estrutura da álgebra de evolución cumpre estas características, é dicir, que é unha matriz estocástica. Así, dada unha poboación de células procariotas que poden presentar  $n$  xenotipos distintos, algunhas das preguntas que poderíamos facernos son as seguintes:

- Que xenotipos poden aparecer a partir dun certo xenotipo?
- Hai subfamilias disxuntas de xenotipos nas que, ao reproducirse internamente, se xeren individuos desa mesma familia?
- Os xenotipos rematan por extinguirse?

O noso propósito é tentar responder a estas preguntas por medio do estudo dalgunhas propiedades das álxebras de evolución, servíndonos da teoría de grafos. Así pois, imos ver como asociar digrafos (ponderados ou non) a álxebras de evolución.

**Definición 2.** Dada unha álgebra de evolución  $\mathcal{E}$  e unha base natural  $B$ , o digrafo ponderado  $\Gamma^\omega(\mathcal{E}, B) = (V, E, \omega)$ , onde  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  é o **conxunto de vértices**,  $E = \{(v_i, v_j) \in V \times V \mid a_{ij} \neq 0\}$  o **conxunto de arestas** e  $\omega$  a aplicación  $E \rightarrow \mathbb{K}$  dada por  $\omega((v_i, v_j)) = a_{ij}$ , denomínase **digrafo ponderado asociado a  $\mathcal{E}$** . Non obstante, en xeral pódese prescindir destas ponderacións. Nese caso, o digrafo  $\Gamma(\mathcal{E}, B) = (V, E)$  denomínase **digrafo asociado a  $\mathcal{E}$** .

**Ejemplo 1.** Sexa  $\mathcal{E}$  unha álgebra de evolución cunha base natural  $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  e cuxo produto ven dado por:  $e_1^2 = e_2 + e_3$ ,  $e_2^2 = 0$ ,  $e_3^2 = -2e_4$  e  $e_4^2 = 5e_3$ . Os digrafos asociados  $\Gamma^\omega(\mathcal{E}, B)$  e  $\Gamma(\mathcal{E}, B)$  son:



**Observación 1.** En xeral, o digrafo asociado a unha álgebra de evolución depende da base natural considerada, tal e como se pode ver no seguinte exemplo.

**Ejemplo 2.** Sexa  $\mathcal{E}$  unha álgebra de evolución con base natural  $B = \{e_1, e_2\}$  e cuxo produto ven dado por  $e_1^2 = e_2$  y  $e_2^2 = e_2$ . Facendo contas, é sinxelo ver que  $B' = \{f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_1 - e_2\}$  tamén é unha base natural, e as expresións do produto respecto desta nova base son  $f_1^2 = f_1 - f_2$  e  $f_2^2 = f_1 - f_2$ . Non obstante, os digrafos  $\Gamma(\mathcal{E}, B)$  e  $\Gamma(\mathcal{E}, B')$  non son isomorfos.



A continuación, defínese o concepto de álgebra de evolución regular e amósase que, neste caso, o digrafo asociado é independente da base natural.

**Definición 3.** *Unha álgebra de evolución  $\mathcal{E}$  dise **regular** se  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^2$ , ou equivalentemente, se o determinante da súa matriz de estrutura é non nulo.*

**Teorema 1** ([2, Corollary 4.7]). *Sexa  $\mathcal{E}$  unha álgebra de evolución regular e considérense  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  e  $B' = \{f_1, \dots, f_n\}$  dúas bases naturais distintas. Entón, existe unha permutación  $\sigma \in S_n$  e un escalar  $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tal que  $f_i = ke_{\sigma(i)}$  para calquera  $i = 1, \dots, n$ .*

O Teorema 1 asegura que se unha álgebra de evolución é regular, entón hai unha única base natural posible salvo permutacións e multiplicación por escalares. Polo tanto, só hai un único digrafo asociado posible, salvo a orde dos nodos, e en consecuencia todos son isomorfos como digrafos.

## Os conxuntos de descendentes

Co obxectivo de responder á primeira das nosas preguntas, introdúcense os seguintes conxuntos tomados de [1].

**Definición 4.** *Sexa  $\mathcal{E}$  unha álgebra de evolución,  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  unha base natural e fixemos un  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ .*

i) *Os **descendentes de primeira xeración** de  $i_0$  son os elementos do conxunto:*

$$D^1(i_0) := \{k \in \{1, \dots, n\} \mid a_{i_0 k} \neq 0\}.$$

ii) *De maneira similar, os **descendentes de segunda xeración** de  $i_0$  son aqueles  $j \in D^1(k)$  para algún  $k \in D^1(i_0)$ . Polo tanto:*

$$D^2(i_0) := \bigcup_{k \in D^1(i_0)} D^1(k).$$

iii) *Por recursividade, os **descendentes da  $m$ -ésima xeración** de  $i_0$  é o conxunto:*

$$D^m(i_0) := \bigcup_{k \in D^{m-1}(i_0)} D^m(k).$$

iv) *Por último, o **conxunto de descendentes** é a unión dos conxuntos anteriores:*

$$D(i_0) := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} D^m(i_0).$$

Biologicamente, os descendentes de primeira xeración do xenotipo  $e_i$  correspóndense cos xenotipos que aparecen en  $e_i^2$ . Os descendentes da  $m$ -ésima xeración do xenotipo  $e_i$  son os xenotipos que aparecen na reprodución dos descendentes da  $(m-1)$ -ésima xeración de  $e_i$ . Por último, o conxunto de descendentes do xenotipo  $e_i$  é a unión de todos os conxuntos anteriores.

Aínda que os conxuntos anteriores poidan parecer difíciles de manexar, imos ilustrar ditas definicións en termos do digrafo asociado a unha álgebra de evolución. Así, é directo que dada unha álgebra de evolución  $\mathcal{E}$ ,  $B$  unha base natural e  $\Gamma(\mathcal{E}, B)$  o seu digrafo asociado, tense que:

- $D^m(i_0) = \{k \in \{1, \dots, n\} \text{ tales que existe un camiño de lonxitude } m \text{ que comeza en } v_{i_0} \text{ e remata en } v_k\}$ .
- $D(i_0) = \{k \in \{1, \dots, n\} \text{ tales que existe un camiño que comeza en } v_{i_0} \text{ e remata en } v_k\}$ .

**Ejemplo 3.** *Considérese a álgebra de evolución do Exemplo 1 e o seu digrafo asociado. Os conxuntos de descendentes do índice 1 son os seguintes:  $D^1(1) = \{2, 3\}$ ,  $D^2(1) = D^{2n}(1) = \{4\}$ ,  $D^3(1) = D^{2n+1}(1) = \{3\}$  e  $D(1) = \{2, 3, 4\}$ .*

Alxebricamente falando, o conxunto de descendentes dun índice permite calcular o ideal xerado polo correspondente elemento da base natural. De agora en adiante,  $\text{span}\{\cdot\}$  denotará o subespazo xerado por certo conxunto de elementos.

**Proposición 1** ([1, Corollary 2.1.7]). *Sexa  $\mathcal{E}$  unha álgebra de evolución con base natural  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Entón, para todo  $k \in \{1, \dots, n\}$  tense que o ideal xerado polo elemento  $e_k$  é  $\text{span}\{e_k, e_j^2 \mid j \in D(k) \cup \{k\}\}$ .*

A maiores, tamén nos permite estudar a simplicidade da álgebra. Véxase que unha álgebra dise **simple** se non é abeliana e o 0 é o seu único ideal propio.

**Proposición 2** ([1, Theorem 2.2.7]). *Sexa  $\mathcal{E}$  unha álgebra de evolución con base natural  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Entón,  $\mathcal{E}$  é simple se, e só se,  $\mathcal{E}$  é regular e  $D(i) = \{1, \dots, n\}$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .*

En termos de grafos, a condición “ $D(i) = \{1, \dots, n\}$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ ” é equivalente a que o digrafo asociado sexa fortemente conexo, é dicir, dados dous nodos existe sempre un camiño que vai dun nodo no outro.

## Descompoñibilidade en álxebras de evolución

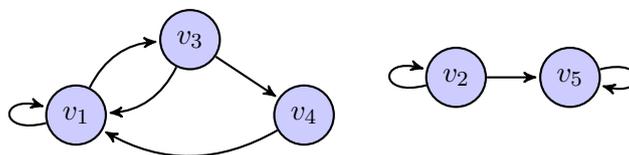
As álxebras de evolución descompoñibles son aquelas que se poden escribir como suma directa de dous ideais non nulos. O estudo desta propiedade faría posible dar resposta á segunda das nosas preguntas xa que, a nivel biolóxico, esta descomposición pode ser vista como unha unión disxunta de familias de xenotipos, na que cada un dos individuos dunha das familias, ao reproducirse, dá lugar a individuos desa propia familia. Así pois, imos ver como a conexidade do digrafo asociado está estreitamente relacionada coa descompoñibilidade da álgebra de evolución.

**Definición 5.** *Unha álgebra de evolución  $\mathcal{E}$  dise **non dexenerada** se existe unha base natural  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  tal que  $e_i^2 \neq 0$  para calquera  $i \in \{1, \dots, n\}$ .*

**Teorema 2** ([2, Proposition 2.8]). *Sexa  $\mathcal{E}$  unha álgebra de evolución non dexenerada e  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  unha base natural. Entón,  $\mathcal{E}$  é indescompoñible se, e só se,  $\Gamma(\mathcal{E}, B)$  é conexo.*

A relevancia deste resultado recae no feito de que a conexidade do digrafo asociado a unha álgebra de evolución non dexenerada non depende da base natural.

**Ejemplo 4.** *Sexa  $\mathcal{E}$  unha álgebra de evolución non dexenerada con base natural  $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  e cuxo produto ven dado por  $e_1^2 = e_1 + e_3$ ,  $e_2^2 = e_2 + e_5$ ,  $e_3^2 = e_1 + e_4$ ,  $e_4^2 = e_1$  e  $e_5^2 = e_5$ . O seu digrafo asociado  $\Gamma(\mathcal{E}, B)$  é:*



En efecto, este digrafo non é conexo xa que presenta dúas compoñentes conexas ben diferenciadas. Polo tanto,  $\mathcal{E} = I \oplus J$  onde  $I = \text{span}\{e_1, e_3, e_4\}$  e  $J = \text{span}\{e_2, e_5\}$ .

**Observación 2.** *No caso de que a álgebra sexa dexenerada, o Teorema 2 deixa de ser válido (véxase o exemplo [2, Example 2.5]).*

## Nilpotencia en álgebras de evolución

O concepto de nilpotencia pódese interpretar bioloxicamente como que os trazos orixinais (ou xeradores) extínguense despois dun certo número de xeracións.

Dada unha álgebra de evolución, introdúcese a seguinte sucesión de subespazos e as seguintes definicións tomadas de [2]:

$$\mathcal{E}^1 = \mathcal{E}, \quad \mathcal{E}^{k+1} = \sum_{i=1}^k \mathcal{E}^i \mathcal{E}^{k+1-i}.$$

**Definición 6.** *Un elemento  $x$  dunha álgebra  $\mathcal{E}$  dise **nil** se existe un número natural  $n$  tal que  $x^n = (\dots((xx)x)\dots)x = 0$ . Ademais,  $\mathcal{E}$  dise que é unha **álgebra nil** se todo elemento é nil.*

**Definición 7.** *Unha álgebra de evolución  $\mathcal{E}$  dise **nilpotente** se existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{E}^n = 0$ . O menor índice  $n$  que o satisfai denomínase **índice de nilpotencia**.*

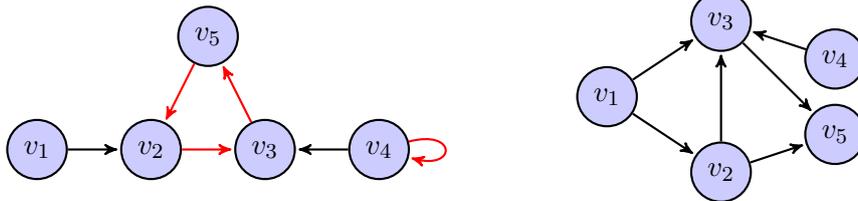
**Teorema 3** ([2, Theorem 3.4]). *Sexa  $\mathcal{E}$  unha álgebra de evolución con base natural  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Entón, as seguintes afirmacións son equivalentes:*

- (i)  $\mathcal{E}$  é nil.

- (ii) Non hai ciclos orientados en  $\Gamma(\mathcal{E}, B)$ .
- (iii) A base natural pode ser reordenada de tal maneira que a matriz de estrutura de  $\mathcal{E}$  é triangular superior con todo ceros na diagonal.
- (iv)  $\mathcal{E}$  é nilpotente.

Este resultado ten dobre importancia. En primeiro lugar, permítenos recoñecer de maneira sinxela álgebras de evolución nilpotentes sen máis que buscar ciclos orientados no seu digrafo asociado. Ademais, a proba deste resultado tamén da un procedemento para a obtención do reordenamento da base natural que fai que a matriz de estrutura sexa triangular superior con todo ceros na diagonal. Polo tanto, sempre que se traballe con álgebras de evolución nilpotentes, pódese supoñer sen perda de xeneralidade que a súa matriz de estrutura ten dita forma.

**Ejemplo 5.** Sexan  $\mathcal{E}_1$  e  $\mathcal{E}_2$  dúas álgebras de evolución coa mesma base natural  $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  e cuxos produtos veñen dados, respectivamente, por  $e_1^2 = e_2$ ,  $e_2^2 = e_3$ ,  $e_3^2 = e_5$ ,  $e_4^2 = e_3 + e_4$  e  $e_5^2 = e_2$ ; e por  $e_1^2 = e_2 + e_3$ ,  $e_2^2 = e_3 + e_5$ ,  $e_3^2 = e_5$ ,  $e_4^2 = e_3$  e  $e_5^2 = 0$ . Os seus digrafos asociados  $\Gamma(\mathcal{E}_1, B)$  e  $\Gamma(\mathcal{E}_2, B)$  son:



O digrafo  $\Gamma(\mathcal{E}_1, B)$  ten un ciclo orientado que involucra aos nodos  $v_2$ ,  $v_3$  y  $v_5$  e un lazo no nodo  $v_4$ . Polo tanto, polo Teorema 3,  $\mathcal{E}_1$  non é nilpotente. Non obstante,  $\Gamma(\mathcal{E}_2, B)$  non presenta ciclos orientados, polo que  $\mathcal{E}_2$  si é nilpotente. Ademais, no digrafo  $\Gamma(\mathcal{E}_2, B)$  vese de maneira sinxela esa interpretación biolóxica que se procuraba. Nótese que nos nodos  $v_1$  e  $v_4$  non entran arestas, polo que cando todos os individuos con xenotipo  $e_1$  e  $e_4$  se reproducen, estes dous desaparecen e quedan soamente os tres restantes. Sucesivamente, cos xenotipos  $e_2$  e  $e_3$  ocorre o mesmo, polo que só quedan individuos con  $e_5$ . Por último, que  $e_5^2 = 0$  pódese interpretar como que os individuos con xenotipo  $e_5$  non se reproducen, o que leva á extinción da poboación.

## Bibliografía

- [1] Y. Cabrera Casado, *Evolution algebras*, PhD thesis, Universidad de Málaga, 2016.
- [2] A. Elduque, A. Labra, *Evolution algebras and graphs*, J. Algebra Appl. **14** (2015), no. 7, 1550103, 10 pp.
- [3] J. P. Tian, P. Vojtěchovský, *Mathematical concepts of evolution algebras in non-Mendelian genetics*, Quasigroups Related Systems **14** (2006), no. 1, 111–122.

## Particularidades de la geometría en curvatura negativa

Área de Xeometría e Topoloxía

Sergio Herrero Vila

CITMaga, Universidad de Santiago de Compostela

6 de abril de 2022

### Introducción

Una de las múltiples formulaciones del quinto postulado de Euclides, la versión de Playfair, afirma que por un punto exterior a una recta pasa una única paralela. En el semiplano de los complejos con parte imaginaria positiva podemos considerar una métrica, conocida como *métrica hiperbólica* que tiene las buenas propiedades que buscamos en una métrica y que, además, no cumple el quinto postulado de Euclides. Podemos entonces estudiar las propiedades del semiplano complejo dotado de esta métrica, el llamado *semiplano de Poincaré*. Es interesante entender la construcción de superficies hiperbólicas a partir de los llamados *grupos fuchsianos*, subgrupos discretos del grupo de isometrías del semiplano de Poincaré.

### Construcción de la métrica hiperbólica: el semiplano de Poincaré

Veamos en primer lugar los problemas que tiene buscar métricas no euclídeas. Seguiremos como principal referencia [1].

Consideremos el semiplano  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$  dotado de la métrica euclidiana, es decir,  $g_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Esta superficie verifica las siguientes propiedades:

- $(\mathbb{H}, g_0)$  no es completa. Dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$  existe una geodésica que minimiza la distancia entre ambos, es decir, es una superficie débilmente completa:

$$\alpha : [0, l] \longrightarrow \mathbb{H}$$

$$s \longmapsto z_1 + s \frac{z_2 - z_1}{|z_2 - z_1|}.$$

Sin embargo,  $(\mathbb{H}, g_0)$  no es completa, ya que  $\alpha$  no es prolongable a  $\mathbb{R}$ , y ser geodésicamente completa y completa son equivalentes en virtud del teorema de Hopf-Rinow.

- $g_0$  no es euclidiana, puesto que para cada geodésica  $\alpha$  y cada punto exterior  $z \in \mathbb{H}$ , hay al menos dos geodésicas que pasan por  $z$  y no contienen a  $\alpha$ .

---

PALABRAS CLAVE: geometría hiperbólica; topología; semiplano de Poincaré; grupos fuchsianos.

**Definición 1.** Una métrica de Riemann  $g$  sobre una variedad diferenciable  $M$  se dice **homogénea** si la acción del grupo de isometrías,  $\text{Iso}(M, g)$ , sobre  $M$  es transitiva, esto es, para cada par de puntos  $x, y \in M$  existe una isometría  $f \in \text{Iso}(M, g)$  tal que  $f(x) = y$ .

**Observación 1.** La métrica  $g_0$  no es homogénea sobre  $\mathbb{H}$  porque la variedad no es completa. Si queremos comprobarlo directamente solo tenemos que observar que  $\text{Iso}(\mathbb{H}, g_0)$  está formado por las isometrías de  $(\mathbb{R}^2, g_0)$  que dejan invariante  $\mathbb{H}$ , es decir,  $\text{Iso}(\mathbb{H}, g_0) = \langle \{t_a\}, s : a \in \mathbb{R} \rangle$ , donde  $t_a(z) = z + a$  y  $s(z) = -\bar{z}$ . Obviamente la acción no es transitiva.

Por este motivo vamos a necesitar construir otra métrica distinta sobre este espacio que tenga mejores propiedades. La cuestión clave es encontrar una métrica que sea completa, no euclidiana y homogénea. La idea es sustituir  $\text{Iso}(\mathbb{H}, g_0)$  por un grupo que actúe transitivamente y construir una métrica  $g$  que haga que las aplicaciones de este grupo sean isometrías.

Nosotros conocemos un grupo que actúa transitivamente sobre  $\mathbb{H}$ , el grupo  $\text{Conf}^+(\mathbb{H}, g_0) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$  de las transformaciones conformes de  $(\mathbb{H}, g_0)$  que conservan la orientación. En particular, este grupo contiene los dos siguientes tipos de transformaciones:

- traslaciones:  $t_a(z) = z + a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,
- homotecias:  $h_\lambda(z) = \lambda z$ ,  $\lambda > 0$ .

Ahora es inmediato comprobar que este grupo actúa transitivamente puesto que cualquier  $z \in \mathbb{H}$  verifica que

$$z = x + iy = t_x \circ h_y(i).$$

Obsérvese que el grupo  $G = \text{Conf}^+(\mathbb{H}, g_0)$  es el grupo  $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) = \{\pm \text{Id}\} \backslash \text{SL}(2, \mathbb{R})$ . Este grupo se conoce como el grupo proyectivo especial lineal, siendo la identificación

$$\frac{az+b}{cz+d} \mapsto \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Ya tenemos un grupo que actúa transitivamente sobre  $\mathbb{H}$ , falta, por tanto, construir una métrica de Riemann de manera que  $\text{Iso}(\mathbb{H}, g) = G$ . Para ello, buscaremos dentro de la familia de métricas conformes a la métrica  $g_0$ .

Sea  $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $ab - cd = 1$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

$$h_{*z}\vec{u} = (h \circ \alpha)'(0) = h'(\alpha(0))\alpha'(0) = h'(z)\vec{u},$$

donde

$$h'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

Nótese que estamos identificando el fibrado tangente a  $\mathbb{C}$ ,  $T\mathbb{C}$ , con  $\mathbb{C}^2$ , es decir,  $u \in T\mathbb{C}$  es  $u = (z, \vec{u})$ , con  $z, \vec{u} \in \mathbb{C}$  y  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \text{Re}(\vec{u}\vec{v})$ .

Observemos además que  $\text{Im}(h(z))$  es de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\text{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= \text{Im}\left(\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{(cz+d)(c\bar{z}+d)}\right) = \text{Im}\left(\frac{a|z|^2+adz+bc\bar{z}+bd}{|cz+d|^2}\right) \\ &= \frac{ad\text{Im}z+bc\text{Im}\bar{z}}{|cz+d|^2} = \frac{\text{Im}z}{|cz+d|^2}.\end{aligned}$$

Se tiene entonces la siguiente expresión:

$$\langle h_{*z}\vec{u}, h_{*z}\vec{v} \rangle = \left\langle \frac{1}{(cz+d)^2}\vec{u}, \frac{1}{(cz+d)^2}\vec{v} \right\rangle = \frac{1}{|cz+d|^4} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{\text{Im}(h(z))^2}{\text{Im}(z)^2} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle.$$

Luego,

$$\frac{1}{\text{Im}(h(z))^2} \langle h_{*z}\vec{u}, h_{*z}\vec{v} \rangle = \frac{1}{\text{Im}(z)^2} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle.$$

De manera que si consideramos como métrica  $g$  la definida por  $g_z(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{\text{Im}(z)^2} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ , tenemos que todas las aplicaciones de  $G$  son isometrías. De hecho, en la sección siguiente probaremos que  $G = \text{Iso}(\mathbb{H}, g)$ , con lo cual ya tenemos que  $(\mathbb{H}, g)$  es un espacio homogéneo, y, por tanto, completo.

## Propiedades del plano hiperbólico

La siguiente proposición de [1] nos describe cómo son exactamente las geodésicas de  $(\mathbb{H}, g)$ :

**Proposición 1.** *Existe una única curva  $\mathcal{C}$  con finales  $z$  y  $z'$  que satisface que  $\text{length}(\mathcal{C}) = \inf_{c \in S} \text{length}(c)$ , siendo  $S$  el conjunto de curvas diferenciables a trozos que tienen como extremos  $z$  y  $z'$ .*

- Si  $\text{Re}(z) = \text{Re}(z')$ , la curva  $\mathcal{C}$  es el segmento euclídeo con puntos finales  $z$  y  $z'$ .
- En otro caso, si consideramos la semicircunferencia en  $\mathbb{H}$  que pasa por  $z$  y  $z'$  y está centrada en el eje real, entonces  $\mathcal{C}$  es el arco de esa semicircunferencia que tiene como extremos  $z$  y  $z'$ .

**Proposición 2.** *El grupo  $G = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  es el grupo de isometrías que preservan la orientación de  $(\mathbb{H}, g)$ .*

*Demostración.* Basta probar que  $G \subset \text{Iso}^+(\mathbb{H}, g)$ . Solo tenemos que probar que una isometría positiva  $f$  de  $\mathbb{H}$  está en  $G$ . Como la acción de  $G$  sobre  $\mathbb{H}$  es transitiva y por isometrías, podemos suponer que  $f$  fija  $i$ . Escogemos  $r \in G_i$ , donde  $G_i$  denota el estabilizador de  $i$  en  $G$ , de tal manera que  $rf(0) = 0$ . Entonces  $rf$  lleva la geodésica que une  $0$  e  $i$  en sí misma, luego  $rf(\infty) = \infty$ . Así,  $rf = \lambda z$  y entonces  $f = r^{-1}a$ , con  $r \in G_i$  y  $a$  una homotecia. Se sigue que  $f \in G$ .  $\square$

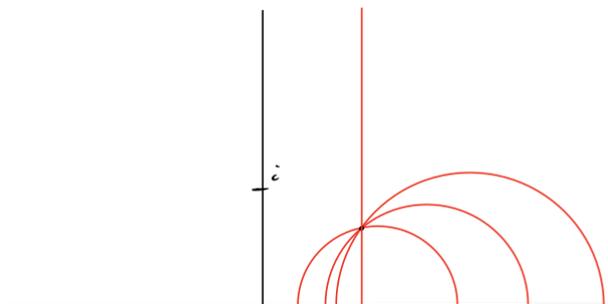


Figura 1: Geodésicas del semiplano de Poincaré.

**Proposición 3.** *La curvatura de Gauss de  $(\mathbb{H}, g)$  es constante  $-1$ .*

*Demostración.* Utilizando la fórmula para la curvatura de una superficie parametrizada ortogonalmente (véase [2, Ejercicio 3.31]) se tiene,

$$\begin{aligned} K &= \frac{-1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\frac{\partial}{\partial x} g_{22}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\frac{\partial}{\partial x} g_{11}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \right) \right) \\ &= \frac{-1}{2\frac{1}{y^2}} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-2}{\frac{1}{y^2}} \right) \right) = \frac{-y^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-2}{y} \right) = y^2 \frac{-1}{y^2} = -1. \end{aligned}$$

□

### Compactificación de $\mathbb{H}$

La topología de  $\mathbb{H}$  inducida por la métrica de Riemann  $g$  es la misma que la inducida por la métrica euclídea. Por lo tanto, con esta topología  $\mathbb{H}$  no es compacto. Consideraremos la clausura de  $\mathbb{H}$  dentro de la compactificación por un punto de  $\mathbb{C}$ . Al borde de  $\overline{\mathbb{H}}$  lo denotaremos por  $\mathbb{H}(\infty) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . La acción de  $G$  sobre  $\mathbb{H}$  se extiende naturalmente a una acción sobre  $\overline{\mathbb{H}}$  que deja invariante el borde.

### Clasificación de las isometrías

Según los puntos que dejen fijos las transformaciones de  $G$  podemos hacer una clasificación de las isometrías positivas de  $\mathbb{H}$ . Obsérvese que un punto  $z \in \overline{\mathbb{H}}$  está fijado por una isometría  $\gamma \equiv \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$  si y solo si:

$$z = \frac{a - d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c}.$$

Definimos la traza de  $\gamma$  como

$$|\text{tr}(\gamma)| = |a + d|.$$

**Definición 2.** Sea  $\gamma \in G - \{\text{Id}\}$ .

- Si  $\gamma$  fija exactamente dos puntos de  $\overline{\mathbb{H}}$  y los dos están en  $\mathbb{H}(\infty)$ , entonces decimos que  $\gamma$  es **hiperbólica** ( $|\text{tr}(\gamma)| > 2$ ).
- Si  $\gamma$  fija exactamente un punto de  $\overline{\mathbb{H}}$  que está en  $\mathbb{H}(\infty)$ , entonces  $\gamma$  se dice **parabólica** ( $|\text{tr}(\gamma)| = 2$ ).
- Si  $\gamma$  fija un solo punto de  $\mathbb{H}$ , entonces  $\gamma$  se dice **elíptica** ( $|\text{tr}(\gamma)| < 2$ ).

## Grupos fuchsianos y dominio de Dirichlet

Ahora que hemos estudiado algunas propiedades del plano de Poincaré y sus isometrías positivas, vamos a centrar nuestro estudio en los subgrupos  $\Gamma < G$ . Como nuestra motivación es obtener superficies topológicamente regulares al cocientar  $\mathbb{H}$  por un subgrupo  $\Gamma$  de  $G$ , nos restringiremos a los llamados *grupos fuchsianos*, subgrupos discretos del grupo de isometrías.

**Definición 3.** Decimos que la acción de un grupo  $\Gamma$  sobre  $\mathbb{H}$  es **propia** *discontinua* si para todo compacto  $K$  de  $\mathbb{H}$ , solo un número finito de transformaciones  $\gamma$  de  $\Gamma$  satisfacen  $\gamma K \cap K \neq \emptyset$ .

**Proposición 4.** [3] La acción de un subgrupo  $\Gamma$  de  $G$  es *propia* discontinua si y solo si  $\Gamma$  es un grupo fuchsiano.

Sin embargo, si lo que queremos es que el cociente sea una variedad diferenciable cuya estructura de Riemann venga inducida por la de  $(\mathbb{H}, g)$ , lo que necesitamos es que  $p : \mathbb{H} \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}$  sea una cubierta regular, y para ello no nos llega con que la acción de  $\Gamma$  sobre  $\mathbb{H}$  sea *propia* discontinua, tenemos que conseguir que sea también libre. Para ello, como los únicos elementos de  $G$  que dejan fijos puntos de  $\mathbb{H}$  son las transformaciones elípticas, nos basta pedir que el grupo fuchsiano en cuestión no contenga ninguna isometría de este tipo.

Nos va a interesar entonces encontrar la forma de visualizar una superficie hiperbólica a partir de un subconjunto de  $\mathbb{H}$  debidamente escogido. Este conjunto es lo que se conoce como *domino fundamental*.

**Definición 4.**  $F \subset \mathbb{H}$  se dice **dominio fundamental** por la acción de  $\Gamma$  si satisface las siguientes condiciones:

- $F$  es cerrado, conexo y  $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$ ;
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma F = \mathbb{H}$ ;
- $\overset{\circ}{F} \cap \gamma \overset{\circ}{F} = \emptyset$ , para todo  $\gamma \in \Gamma - \{\text{Id}\}$ .

Siempre existe un conjunto con estas características y se dice que  $\Gamma$  tesela  $\mathbb{H}$ .

Solo nos falta entonces encontrar una manera sencilla de encontrar un dominio fundamental para un grupo fuchsiano dado.

**Definición 5.** Sea  $\Gamma < G$  un grupo fuchsiano y  $z_0 \in \mathbb{H}$  tal que  $\gamma(z_0) \neq z_0$  para cualquier  $\gamma \in \Gamma - \{\text{Id}\}$ . Se define el **dominio de Dirichlet de  $\Gamma$**  centrado  $z_0$  como

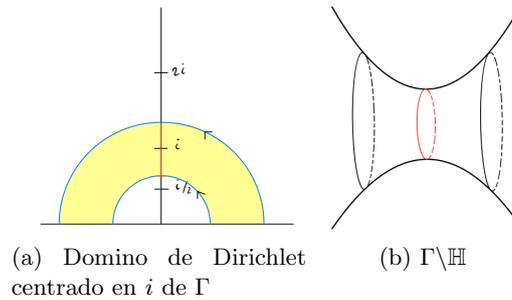
$$\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma) := \bigcap_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq \text{Id}}} \mathbb{H}_{z_0}(\gamma),$$

donde  $\mathbb{H}_{z_0}(\gamma) = \{z \in \mathbb{H} : d(z, z_0) \leq d(z, \gamma(z_0))\}$ .

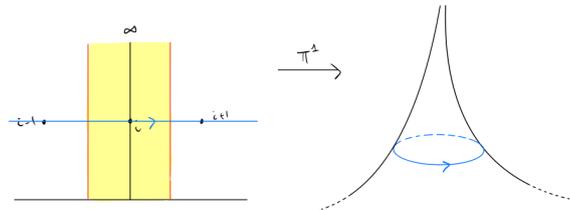
**Teorema 1.** (Véanse [1], [3]) Un dominio de Dirichlet es un dominio fundamental convexo de  $\Gamma$ .

Veamos como visualizar alguna superficie elemental a partir de sus dominios de Dirichlet.

**Ejemplo 1.** Consideremos  $\Gamma = \langle 2z \rangle$ :



**Ejemplo 2.** Consideremos ahora  $\Gamma = \langle z + 1 \rangle$ :



## Bibliografía

- [1] Dal'Bo, F. (2012). *Trajectoires géodésiques et horocycliques*. EDP sciences.
- [2] Hernández Cifre, M.A. y Pastor González, J.A. (2010). *Un curso de geometría diferencial*, CSIC Press, Madrid.
- [3] Katok, S. (1992). *Fuchsian groups*. University of Chicago press.

## Anillos neuronales

Área de Álgebra

Iria Rodríguez Acevedo

Universidad de Santiago de Compostela

20 de abril de 2022

### Introducción

Los códigos neuronales son un modelo del funcionamiento de las células del sistema nervioso. Desde el punto de vista matemático, estos códigos constituyen una construcción combinatoria cuyas propiedades permiten explicar ciertos aspectos del funcionamiento del cerebro. En particular, partiendo del conocimiento de un código neuronal (lo cual es algo factible ya que es posible medir cuándo las neuronas se activan) podremos estudiar el espacio de estímulos. Para ello se introducirán dos construcciones matemáticas: el anillo neuronal y el ideal neuronal. Este punto de vista los relaciona con la geometría sobre cuerpos finitos.

El estudio algebraico de los códigos neuronales se inició en 2013 con el trabajo pionero de Carina Curto, Vladimir Itskov, Alan Veliz-Cuba y Nora Youngs en [1] y se continuó en 2014 por Nora Youngs en [2]. En estos trabajos se encuentran las demostraciones de los resultados que se enunciarán.

### Códigos neuronales

**Definición 1.** Dado un conjunto de neuronas etiquetadas  $\{1, \dots, n\} = [n]$ , se define un **código neuronal**  $\mathcal{C} \subset \{0, 1\}^n$  como un conjunto de patrones binarios de actividad neuronal. Un elemento de un código neuronal  $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{C}$  se denomina “**codeword**” o **palabra de código**, y se corresponde con el siguiente subconjunto de neuronas

$$\text{supp}(c) := \{i \in [n] \mid c_i = 1\} \subset [n].$$

**Ejemplo 1.** Dadas tres neuronas etiquetadas  $\{1, 2, 3\} = [3]$ , un posible código neuronal sería  $\mathcal{C} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ . Se tiene que  $(1, 1, 0) \in \mathcal{C}$  y que  $\text{supp}((1, 1, 0)) = \{1, 2\}$ , es decir, la palabra de código  $(1, 1, 0)$  se identifica con las neuronas 1 y 2. Análogamente, las palabras palabras de código  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$  se identifican con la segunda y la tercera neurona, respectivamente. Esto se puede interpretar como una reacción conjunta de las neuronas 1 y 2 a ciertos estímulos, mientras que para otros sólo reacciona la segunda o la tercera de ellas.

---

PALABRAS CLAVE: código neuronal; anillo neuronal; ideal neuronal; estructura RF; forma canónica.

## Códigos de campo receptivo

**Definición 2.** Un **campo receptivo** es una aplicación  $f_i: X \rightarrow [0, \infty)$  desde un espacio de estímulos,  $X$ , que lleva cada estímulo a la tasa media de activación de una sola neurona,  $i$ , en respuesta a tal estímulo.

Se hará un abuso del lenguaje llamando tanto a la aplicación como a su soporte campos receptivos.

**Definición 3.** Sea  $X \subset \mathbb{R}^d$ . Un campo receptivo se dice **convexo** si es un subconjunto convexo del espacio de estímulos  $X$ .

**Definición 4.** Sea  $X$  un espacio de estímulos y sea  $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$  una colección de conjuntos abiertos, siendo cada  $U_i \subset X$  el campo receptivo de la  $i$ -ésima neurona en una población de  $n$  neuronas. Un **código de campo receptivo** o **código RF**  $\mathcal{C}(\mathcal{U}) \subset \{0, 1\}^n$  es el conjunto de todas las palabras de código correspondientes a los estímulos en  $X$ :

$$\mathcal{C}(\mathcal{U}) := \left\{ c \in \{0, 1\}^n \mid \left( \bigcap_{i \in \text{supp}(c)} U_i \right) \setminus \left( \bigcup_{j \notin \text{supp}(c)} U_j \right) \neq \emptyset \right\}.$$

Esta definición es lógica ya que cuando un estímulo se encuentra en la intersección de varios campos receptivos las neuronas correspondientes pueden activarse, mientras que el resto permanece en “silencio”.

Se adoptará la convención natural según la cual  $\bigcap_{i \in \emptyset} U_i = X$  y  $\bigcup_{i \in \emptyset} U_i = \emptyset$ .

**Ejemplo 2.** Sea  $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3\}$  una colección de conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^2$ , donde:  $U_1$  es el círculo de centro  $(1, 0)$  y radio 1,  $U_2$  es el círculo de centro  $(0, 0)$  y radio 2 y  $U_3$  es el círculo de centro  $(4, 0)$  y radio 1. Gráficamente:

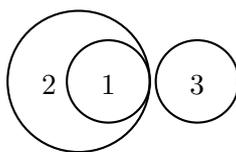


Figura 1: Campos receptivos relativos a 3 neuronas.

Si se considera cada  $U_i$  como el campo receptivo de la  $i$ -ésima neurona, donde  $i \in \{1, 2, 3\}$ , y como espacio de estímulos  $X = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ , se tiene que el código RF correspondiente a  $\mathcal{U}$  es  $\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \{110, 010, 001\}$ , el mismo del Ejemplo 1.

**Definición 5.** Si  $X \subset \mathbb{R}^n$  y cada uno de los  $U_i$  es también un subconjunto convexo de  $X$ , entonces se dice que  $\mathcal{C}(\mathcal{U})$  es un **código RF convexo**.

A continuación se mostrará la importancia de la suposición o no de convexidad a través del siguiente resultado.

**Lema 1.** Sea  $\mathcal{C} \subset \{0,1\}^n$  un código neuronal. Entonces, para cualquier  $d \geq 1$ , existe un espacio de estímulos  $X \subset \mathbb{R}^d$  y una colección de conjuntos abiertos  $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$  (no necesariamente convexos), con  $U_i \subset X$  para cada  $i \in [n]$ , tal que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$ .

Si se añade la suposición de convexidad este resultado no tiene por qué verificarse. Esto será relevante a la hora del estudio del espacio de estímulos subyacente  $X$  a partir del conocimiento de  $\mathcal{C}$  y no de  $\mathcal{U}$ .

**Definición 6.** Sea  $\mathcal{C} \subset \{0,1\}^n$  un código neuronal, y sea  $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$  una disposición de campos receptivos en un espacio de estímulos  $X$  tal que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$ . La **estructura de campo receptivo** o **estructura RF** de  $\mathcal{C}$  se refiere al conjunto de relaciones entre los  $U_i$  que tienen la forma

$$\bigcap_{i \in \sigma} U_i \subseteq \bigcup_{j \in \tau} U_j \text{ para } \sigma \cap \tau = \emptyset.$$

## El anillo y el ideal neuronal

En esta sección se definirán el anillo neuronal  $R_{\mathcal{C}}$  y el ideal neuronal  $J_{\mathcal{C}}$ , los cuales están estrechamente relacionados. Estos objetos se pueden utilizar para extraer algorítmicamente una descripción compacta y mínima de la estructura RF dictada por un código.

### El anillo neuronal

Sea  $k$  un cuerpo,  $n$  el número de neuronas y  $k[x_1, \dots, x_n]$  el anillo de polinomios con una indeterminada  $x_i$  por cada neurona. Se considerará al espacio afín  $\mathbb{A}_k^n$  como el espacio de actividad neuronal, donde cada  $n$ -tupla  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{A}_k^n$  es un vector cuyas componentes  $v_i$  representan el estado de la neurona  $i$ . Nótese que cualquier polinomio  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$  puede ser evaluado en un punto  $v \in \mathbb{A}_k^n$  haciendo que  $x_i = v_i$  cada vez que  $x_i$  aparece en  $f$ . Se denotará este valor por  $f(v)$ . Se considerará que las neuronas solo tienen dos estados, “encendido” o “apagado” y, por tanto, es lógico escoger  $k = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ .

Sea  $\mathcal{C} \subset \{0,1\}^n = \mathbb{A}_{\mathbb{F}_2}^n$  un código neuronal, se define el ideal  $I_{\mathcal{C}}$  de  $\mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n]$  como el ideal de ceros de  $\mathcal{C}$ , es decir, el correspondiente al conjunto de polinomios que se anulan en todas las palabras de código de  $\mathcal{C}$ :

$$I_{\mathcal{C}} := \{f \in \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n] \mid f(c) = 0 \text{ para todo } c \in \mathcal{C}\}.$$

**Observación 1.** Nótese que, independientemente de  $\mathcal{C}$ , el ideal generado por las relaciones booleanas  $\Gamma_2(\mathbb{F}_2) = \langle x_1^2 - x_1, \dots, x_n^2 - x_n \rangle$  está contenido en  $I_{\mathcal{C}}$ .

**Definición 7.** Se define el **anillo neuronal**  $R_{\mathcal{C}}$  correspondiente a un código neuronal  $\mathcal{C}$  como el anillo cociente

$$R_{\mathcal{C}} := \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n]/I_{\mathcal{C}}.$$

## El ideal neuronal

La definición del anillo neuronal es poco práctica, ya que no proporciona expresiones explícitas para generar  $I_C$  y  $R_C$ . En esta sección se definirá otro ideal,  $J_C$ , mediante un conjunto explícito de generadores.

Para cualquier  $v \in \{0, 1\}^n$ , se considera la función  $\rho_v \in \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n]$  definida como

$$\rho_v := \prod_{i=1}^n (1 - v_i - x_i) = \prod_{\{i|v_i=1\}} x_i \prod_{\{j|v_j=0\}} (1 - x_j) = \prod_{i \in \text{supp}(v)} x_i \prod_{j \notin \text{supp}(v)} (1 - x_j).$$

**Definición 8.** Se define el **ideal neuronal**  $J_C \subseteq \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n]$  correspondiente al código neuronal  $\mathcal{C}$  como el ideal generado por todas las funciones  $\rho_v$ , con  $v \notin \mathcal{C}$ :

$$J_C := \langle \{\rho_v \mid v \notin \mathcal{C}\} \rangle.$$

**Ejemplo 3.** Retomando de nuevo el Ejemplo 1, se tiene que el ideal neuronal correspondiente a dicho código es  $J_C = \langle \{\rho_{111} = x_1x_2x_3, \rho_{000} = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3), \rho_{101} = x_1x_3(1-x_2), \rho_{011} = x_2x_3(1-x_1), \rho_{100} = x_1(1-x_2)(1-x_3)\} \rangle$ , ya que  $2^{[3]} \setminus \mathcal{C} = \{111, 000, 101, 011, 100\}$ .

El siguiente resultado facilita un conjunto de generadores explícitos para  $I_C$ , relacionando  $J_C$  con  $I_C$ .

**Lema 2.** Sea  $\mathcal{C} \subset \{0, 1\}^n$  un código neuronal. Entonces

$$I_C = J_C + \Gamma_2(\mathbb{F}_2) = \langle \{\rho_v \mid v \notin \mathcal{C}\}, \{x_i(1-x_i) \mid i \in [n]\} \rangle,$$

donde  $\Gamma_2(\mathbb{F}_2)$  es el ideal generado por las relaciones booleanas y  $J_C$  es el ideal neuronal.

## Estructura RF de un código neuronal

En esta sección se presentará un conjunto alternativo de relaciones que permitirán interpretar los elementos de  $I_C$  como relaciones de campo receptivo, aclarando la conexión entre el anillo e ideal neuronal y la estructura RF del código.

Sea  $\mathcal{C} \subset \{0, 1\}^n$  un código neuronal, considérese  $X$  un espacio de estímulos y  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1 \dots n}$  una colección de conjuntos abiertos en  $X$  tales que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$ . El anillo neuronal correspondiente a este código es  $R_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}$ .

Para cualquier  $\sigma \subset [n]$ , se define  $U_\sigma := \bigcap_{i \in \sigma} U_i$  y  $x_\sigma := \prod_{i \in \sigma} x_i$ . Por convención  $x_\emptyset = 1$  y  $U_\emptyset = X$ .

Obsérvese que para cualquier  $p \in X$  se tiene que  $x_\sigma(p) = \begin{cases} 1, & p \in U_\sigma, \\ 0, & p \notin U_\sigma. \end{cases}$

Estas observaciones motivan la definición de un nuevo ideal,  $I_{\mathcal{U}} \subset \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n]$ , determinado a partir de la disposición de los campos receptivos  $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$

directamente:  $I_{\mathcal{U}} := \left\langle \left\{ x_\sigma \prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \mid U_\sigma \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i \right\} \right\rangle$ .

El ideal de ceros del código RF  $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ ,  $I_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}$ , y el ideal  $I_{\mathcal{U}}$  que se acaba de definir son coincidentes, por lo que  $I_{\mathcal{U}}$  proporciona un conjunto alternativo de relaciones que puede utilizarse para definir  $R_{\mathcal{C}(\mathcal{U})}$ .

Por analogía con  $J_{\mathcal{C}}$  tiene sentido definir un ideal  $J_{\mathcal{U}}$  que se obtenga eliminando las relaciones booleanas, de forma que se pueda escribir que  $I_{\mathcal{U}} = J_{\mathcal{U}} + \Gamma_2(\mathbb{F}_2)$ :

$$J_{\mathcal{U}} := \left\langle \left\{ x_{\sigma} \prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \mid \sigma \cap \tau = \emptyset \text{ y } U_{\sigma} \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i \right\} \right\rangle.$$

Existen además resultados que permiten extraer relaciones entre los campos receptivos que forman parte de la estructura RF del código  $\mathcal{C}$ , a partir de relaciones que aparecen en  $I_{\mathcal{C}}$ . Es por ello por lo que el siguiente objetivo que se plantea es la obtención de una lista “mínima” de generadores para que  $J_{\mathcal{C}}$ , y por tanto  $I_{\mathcal{C}}$ , capte la estructura RF esencial del código. Esto se hará por medio de la eliminación de relaciones redundantes, como se verá en la siguiente sección.

## Forma canónica del ideal neuronal

**Definición 9.** Un polinomio  $f \in \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n]$  se dice que es un **pseudomonomio** si tiene la forma  $f = \prod_{i \in \sigma} x_i \prod_{j \in \tau} (1 - x_j)$ , para algunos  $\sigma, \tau \subset [n]$  con  $\sigma \cap \tau = \emptyset$ .

Un ideal  $J \subset \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n]$  es un **ideal pseudomonomial** si  $J$  puede ser generado por un conjunto finito de pseudomonomios. Se dice que  $f$  es un **pseudomonomio mínimo** de  $J$  si no existe otro pseudomonomio  $g \in J$  con  $\deg(g) < \deg(f)$  tal que  $f = hg$  para algún  $h \in \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n]$ .

**Definición 10.** Decimos que un ideal pseudomonomial  $J$  está en **forma canónica** si lo presentamos como  $J = \langle f_1, \dots, f_l \rangle$ , donde el conjunto  $CF(J) = \{f_1, \dots, f_l\}$  es el conjunto de todos los pseudomonomios mínimos de  $J$ . Equivalentemente, nos referimos a  $CF(J)$  como la forma canónica de  $J$ .

En lo que sigue, la finalidad será describir la forma canónica de  $J_{\mathcal{C}}$ .

**Definición 11.** Se dice que  $\sigma \subseteq [n]$  es **mínimo con respecto a la propiedad  $P$**  si  $\sigma$  satisface  $P$ , pero  $P$  no se satisface para todo  $\tau$  contenido estrictamente en  $\sigma$ .

**Teorema 1.** Sea  $\mathcal{C} \subset \{0, 1\}^n$  un código neuronal, y sea  $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$  cualquier colección de conjuntos abiertos (no necesariamente convexos) en un espacio de estímulos no vacío  $X$  tal que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$ . La forma canónica de  $J_{\mathcal{C}}$  es

$$J_{\mathcal{C}} = \left\langle \left\{ x_{\sigma} \mid \sigma \text{ es mínimo con respecto a } U_{\sigma} = \emptyset \right\}, \right. \\ \left. \left\{ x_{\sigma} \prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \mid \sigma, \tau \neq \emptyset, \sigma \cap \tau = \emptyset, U_{\sigma} \neq \emptyset, \bigcup_{i \in \tau} U_i \neq X \right. \right. \\ \left. \left. \text{y } \sigma, \tau \text{ son mínimos con respecto a } U_{\sigma} \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \mid \tau \text{ es mínimo con respecto a } X \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i \right\} \right\rangle.$$

Los tres conjuntos (disjuntos) de relaciones que componen  $CF(J_{\mathcal{C}})$  serán llamados las relaciones mínimas tipo 1, las relaciones mínimas de tipo 2 y las relaciones mínimas de tipo 3, respectivamente.

Obsérvese que, debido a la unicidad de la forma canónica, dada una forma canónica  $CF(J_{\mathcal{C}})$  el Teorema 1 permite leer las correspondientes relaciones mínimas que debe satisfacer cualquier representación de campo receptivo del código como  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$ :

- i) **Tipo 1:**  $x_{\sigma} \in CF(J_{\mathcal{C}})$  implica que  $U_{\sigma} = \emptyset$ , pero todas las intersecciones de orden inferior  $U_{\gamma}$  con  $\gamma \subsetneq \sigma$  son no vacías.
- ii) **Tipo 2:**  $x_{\sigma} \prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \in CF(J_{\mathcal{C}})$  implica que  $U_{\sigma} \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i$ , pero ninguna intersección de orden inferior está contenida en  $\bigcup_{i \in \tau} U_i$  y todos los  $U_i$  son necesarios para que  $U_{\sigma} \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i$ .
- iii) **Tipo 3:**  $\prod_{i \in \tau} (1 - x_i) \in CF(J_{\mathcal{C}})$  implica que  $X \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i$ , pero  $X$  no está contenido en ninguna unión de orden inferior  $\bigcup_{i \in \gamma} U_i$  para  $\gamma \subsetneq \tau$ .

La forma canónica  $CF(J_{\mathcal{C}})$  proporciona así una descripción mínima de la estructura RF dictada por el código  $\mathcal{C}$ . En [1] puede encontrarse un método algorítmico para hallar la forma canónica  $CF(J_{\mathcal{C}})$  a partir únicamente del conocimiento de  $\mathcal{C}$ . De esta forma, se ha conseguido inferir a partir de la estructura intrínseca del código neuronal características sobre el espacio de estímulos.

**Ejemplo 4.** Gracias al método algorítmico antes mencionado, se obtiene que la forma canónica del ideal  $J_{\mathcal{C}}$  correspondiente al código  $\mathcal{C}$  del Ejemplo 2 es

$$CF(J_{\mathcal{C}}) = \{(1 - x_3)(1 - x_2), x_1(1 - x_2), x_1x_3, x_2x_3\}.$$

Se obtienen entonces las siguientes conclusiones para cualquier representación de campo receptivo del código como  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$ :

- i) Se tienen las siguientes relaciones de tipo 1:  $\{x_1x_3, x_2x_3\}$ . Por tanto, se sigue que  $U_1 \cap U_3 = \emptyset$ , que  $U_2 \cap U_3 = \emptyset$ , pero que  $U_1, U_2$  y  $U_3$  son no vacíos.
- ii) La única relación de tipo 2 es  $x_1(1 - x_2)$ . De ello se deduce que  $U_1 \subseteq U_2$ .
- iii) La única relación de tipo 3 es  $(1 - x_3)(1 - x_2)$ . Esta implica que  $X = U_3 \cup U_2$ , que  $X \subsetneq U_3$  y que  $X \subsetneq U_2$ .

De esta forma, una posible representación de  $\mathcal{C}$  es la ya vista en el Ejemplo 2.

## Bibliografía

- [1] Curto, C., Itskov, V., Veliz-Cuba, A. y Youngs, N. (2013). *The neural ring: An algebraic tool for analyzing the intrinsic structure of neural codes*, Bulletin of Mathematical Biology, **75**(9), pp. 1571–1611.
- [2] Youngs, N. E. (2014). *The neural ring: Using algebraic geometry to analyze neural codes*, Tesis doctoral, Universidad de Nebraska-Lincoln.



## Transformada de Fourier y Laplace y sus aplicaciones a EDPs

Área de Análisis Matemático

Mouhcine Yousfi

Universidad de Santiago de Compostela

4 de mayo de 2022

### Introducción

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales juegan un papel muy importante en las matemáticas y la física matemática para modelizar y entender problemas de índoles muy diversas. Notemos que existen muchos métodos de resolución de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

En esta charla presentamos desarrollamos un método alternativo de resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales mediante el uso de dos tipos de transformadas integrales: transformada de Laplace y transformada de Fourier. Este método nos permite ahorrar los numerosos cálculos que implican la derivación y la integración, pudiendo optimizar la resolución y convirtiéndolo en un proceso más efectivo.

Se hace un estudio de la transformada de Laplace y la transformada de Fourier dando las definiciones básicas y varias propiedades principales. Después se aplican dichas transformadas para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales mediante el uso del concepto de la transformada inversa.

Por último, veremos el estudio de la ecuación del calor con condiciones de Dirichlet y para eso nos hace falta una función de Green apropiada. También se estudia otros tipos de condiciones de contorno como problemas de von Neumann y problemas mixtos.

### Transformada de Laplace

En los últimos años, ha aumentado el interés por el uso de las transformadas de Laplace como método eficiente para resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales e integrales (véanse [1], [4] y [6]). Además de esas aplicaciones, las transformadas de Laplace también tienen estrechas relaciones con partes importantes de las matemáticas puras.

Se define la transformada integral como cualquier operador  $T$  aplicado sobre una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de la forma

$$T(f(t)) = \int_a^b K(p, x) f(x) dx, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

---

PALABRAS CLAVE: Transformada de Laplace y Fourier, Función de Green, Ecuación de calor

A la función  $K(p, x)$  se le llama núcleo de  $T$ . Cuando  $k(p, x) = e^{-xp}$ , se obtiene la transformada  $\mathcal{L}$  de Laplace, definida por

$$\mathcal{L}[f(x)] = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx = F(p). \quad (2)$$

La función  $f$  en (2) se llama inversa de  $F$  y se denotará por  $\mathcal{L}^{-1}[F]$ , i.e.,

$$f = \mathcal{L}^{-1}[F].$$

### Propiedades

**Teorema 1 (linealidad).** Sean  $f_n$  funciones cuyas transformadas de Laplace existen y, sean  $c_n$ ,  $1 \leq n \leq k$ , números reales. Entonces,

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(x) + \cdots + c_k f_k(x)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(x)] + \cdots + c_k \mathcal{L}[f_k(x)]$$

Para poder establecer una condición suficiente para la existencia de la Transformada de Laplace es necesario introducir tenemos la siguiente resultado.

**Definición 1.** Una función  $f$  se dice de **orden exponencial  $\alpha$** , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si existen constantes positivas  $n$  y  $M$  tales que  $|f(x)| \leq M e^{\alpha x}$  para todo  $x \geq n$ .

**Teorema 2 (Existencia).** Sea  $f(x)$  una función continua a trozos en  $[0, \infty)$  y de orden exponencial  $\alpha$ . Entonces,  $\mathcal{L}[f]$  existe para  $p > \alpha$ .

Como propiedades importantes que se usan para facilitar el cálculo de la transformada de Laplace destacamos las siguientes.

**Teorema 3 (Transformada de la derivada).** Sea  $f$  una función continua en  $[0, \infty)$  tal que  $f'$  es continua a trozos en  $[0, \infty)$  y,  $f, f'$  son ambas de orden exponencial  $\alpha$ . Entonces,

$$\mathcal{L}[f'] = p\mathcal{L}[f] - f(0), \quad p > \alpha.$$

**Teorema 4 (Transformada de Laplace inversa).** Sea  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $e^{-at} f(t) \in L^1[0, \infty)$  para algún  $a \in \mathbb{R}$ , y existen las derivadas laterales de  $f$  y son finitas en  $[0, \infty)$ . Entonces, para cualquier  $t > 0$  y  $r > a$  se cumple la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}(f)(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{(r+is)t} \mathcal{L}(f)(r+is) ds \\ &=: V.P. \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(r+is)t} \mathcal{L}(f)(r+is) ds. \end{aligned}$$

## Transformada de Fourier

En esta sección se define la transformada de Fourier y se estudian algunas de sus propiedades (ver [1], [2], [6], [7] y [8]).

**Definición 2.** Dada  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  se define la **transformada de Fourier de  $f$**  como una función  $\widehat{f}$  de  $\mathbb{R}$  con valores en  $\mathbb{C}$  dada por

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ixy} dx, \text{ para todo } y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}$$

Se puede probar que la transformada de Fourier de una gaussiana es otra función gaussiana. Esta propiedad es la que servirá de norma para introducir una clase de funciones que se define a continuación.

**Definición 3.** Definimos el conjunto de **funciones temperadas o clase de Schwartz** como

$$S(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) / \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m f^{(n)}(x)| \leq c_{n,m} < \infty, \forall n, m \in \mathbb{N}\}.$$

**Definición 4.** Se define la transformada de Fourier de  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  como

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, y \rangle} dx, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

y el conjunto de funciones temperadas en  $\mathbb{R}^n$  como

$$S(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) / \left| x_j^k \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| \leq c_{k,j,\alpha} < \infty\},$$

siendo  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,  $\alpha_i = 0, 1, 2, \dots$  y  $k, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Teorema 5.** Supongamos que  $f \in S(\mathbb{R}^n)$ , podemos definir

$$\widehat{\frac{\partial^k f}{\partial x_j^k}}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^k f}{\partial x_j^k}(x) e^{-2\pi i \langle x, y \rangle} dx.$$

Entonces:

- $\widehat{\frac{\partial^k f}{\partial x_j^k}}(y) = (2\pi i y_j)^k \widehat{f}(y).$
- $\widehat{\Delta f}(y) = -4\pi^2 \|y\|^2 \widehat{f}(y).$

Se puede demostrar que si  $f \in S(\mathbb{R})$  entonces  $\widehat{f} \in S(\mathbb{R})$ . Por lo tanto,

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(y)| = 0, \quad (3)$$

que puede verse como una extensión a la transformada de Fourier del teorema de Riemann-Lebesgue visto en series de Fourier. Realmente el resultado, que es conocido también como teorema de Riemann-Lebesgue, es para funciones integrables y puede obtenerse de (3) por un argumento de densidad de  $S(\mathbb{R})$  en las funciones integrables.

**Teorema 6 (Riemann-Lebesgue).** *Sea  $f$  función integrable en  $\mathbb{R}$ , es decir,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f| dx < \infty,$$

*entonces*

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(y)| = 0.$$

**Lema 1.** *Sean  $f, g \in S(\mathbb{R})$ . Entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \widehat{g}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) g(y) dy.$$

Este resultado y el hecho de que la transformada de Fourier de una gaussiana es otra gaussiana serán los ingredientes fundamentales de la prueba del teorema de inversión.

Hemos comentado que si  $f \in S(\mathbb{R})$  entonces  $\widehat{f} \in S(\mathbb{R})$ . Luego tiene sentido la siguiente definición.

**Definición 5 (Transformada inversa de Fourier).** *Sea  $\widehat{f}$  la transformada de Fourier de  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  se define*

$$\widetilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle x, y \rangle} \widehat{f}(y) dy.$$

*Esta fórmula se conoce como transformada inversa de Fourier. La conjetura es que  $\widetilde{f} = f$ . El siguiente resultado prueba esta conjetura.*

**Teorema 7.** *Si  $f \in S(\mathbb{R})$ , entonces  $\widetilde{f} = f$ .*

## Núcleo de la ecuación del calor con condiciones de Dirichlet

Esta última sección está dedicada al estudio de la ecuación de calor unidimensional no homogénea junto con las condiciones de contorno de Dirichlet (ver [3] y [4]). La principal diferencia se radica en el hecho de que la solución no se da como una serie de términos infinitos. En nuestra expresión, la solución se da como una suma de dos integrales con un número finito de términos en el núcleo. Además, al contrario del método clásico, donde las soluciones se derivan de una aplicación directa del método de separación de variables, sobre la base de la teoría espectral y desarrollos en series de Fourier, la solución se obtiene mediante la aplicación de la transformada de Laplace con respecto a la variable de tiempo y el uso de una función de Green apropiada.

### Problema de Dirichlet unidimensional

Consideremos la ecuación del calor unidimensional no homogénea con condiciones de contorno de Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = F(x, t), & x \in I, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in I, \end{cases} \quad (4)$$

con  $I = [0, 1]$  y  $u, u_t, u_{xx} \in C(I \times (0, \infty))$ .

La única solución del problema (4) viene dada por:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t), \quad x \in I, \quad t \geq 0$$

con  $u_1$  la única solución acotada de (4) con  $F = 0$  y  $u_2$  la única solución acotada de (4) con  $f = 0$ .

Se puede probar que la función definida por

$$v(x) = \int_0^1 g(m, x, y) f(y) dy, \quad x \in I,$$

es la única solución del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -v''(x) + m^2 v(x) = f(x), & x \in I, \quad m \geq 0, \\ v(0) = v(1) = 0, \end{cases}$$

donde para  $m > 0$

$$g(m, x, y) = \frac{-1}{m \operatorname{senh}(m)} \begin{cases} \operatorname{senh}(m(x-1)) \operatorname{senh}(my), & 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ \operatorname{senh}(mx) \operatorname{senh}(m(y-1)), & 0 < x < y \leq 1, \end{cases}$$

y para  $m = 0$

$$g(0, x, y) = \begin{cases} (1-x)y, & 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ x(1-y), & 0 < x < y \leq 1. \end{cases}$$

**Teorema 8.** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \in C^2(I)$ ,  $f(0) = f(1) = 0$  y  $f''(0) = f''(1) = 0$ . Entonces, la única solución acotada  $u_1 : I \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  de (4) con  $F = 0$  viene dada por la expresión

$$u_1(x, t) = V.P \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{sti} g(\sqrt{is}, x, y) f(y) dy ds,$$

donde V.P representa el valor principal de Cauchy.

**Teorema 9.** Sea  $F : I \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada tal que  $F(0, t) = F(1, t) = 0$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} F(0, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(1, t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ ,  $F, \frac{\partial}{\partial x} F, \frac{\partial^2}{\partial x^2} F \in C(I \times [0, \infty))$ . Entonces, la única solución acotada,  $u_2 : I \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , de (4) con  $f = 0$  viene dada por la expresión

$$u_2(x, t) = V.P \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{ri(t-s)} g(\sqrt{ri}, x, y) F(y, s) dy dr ds.$$

### Otros problemas de contorno

En esta subsección se puede aplicar de forma análoga los resultados de la primera sección de esta sección a otros problemas de contorno como por ejemplo las condiciones de contorno mixtos y de Von Neumannn.

#### Problema de Neumann:

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = F(x, t), & x \in (0, \infty), \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

#### Problemas mixtos:

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = F(x, t), & x \in (0, \infty), \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = F(x, t), & x \in (0, \infty), \quad t > 0, \\ u(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

### Bibliografía

- [1] J.A. Murillo, *variable compleja y transformadas*, DM-Universidad de Murcia, 2000.
- [2] B. Davies, *Integral transforms and their applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [3] F. Jhon, *Partial Diferential*, fourth ed., in: Applied Mathematical Sciences, vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [4] J.M. Almira, *Mathematics for the Recovery of Signals: an Introduction*, in: Grupo Editorial Universitario, 2005 (in Spanish).
- [5] E. Oram Brigham, *The Fast Fourier Transform and its applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632.
- [6] R.P. Agarwal, D. O'Regan, *Ordinary and Partial Differential Equations. With Special Functions, Fourier Series, and Boundary Value Problems*, Universitext, Springer, New York, 2009.
- [7] A. Pinkus, S. Zafrany, *Fourier series and integral transforms*, Cambridge University Press, 1997.
- [8] Peral Alonso I. *Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales*, Addison Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, 1995.



## ¿Puede ayudar la estadística a la optimización?

Área de Estadística e Investigación Operativa

Ignacio Gómez Casares

CITMAga (Centro de Investigación y Tecnología Matemática de Galicia) y  
Universidad de Santiago de Compostela

18 de mayo de 2022

### Introducción

En el campo de la optimización matemática se han estudiado exhaustivamente las técnicas de resolución de problemas lineales y, más concretamente, lineales y enteros. La optimización no lineal, debido a su mayor complejidad, no ha sido tan abordada y es en los últimos años cuando se ha visto un incremento del interés por este tipo de problemas y sus técnicas de resolución.

En concreto, una clase de problemas importante dentro de la optimización no lineal es la de los problemas polinómicos, donde tanto las restricciones como la función objetivo vienen dadas por polinomios. Aunque no son todo lo generales que uno esperaría, la ventaja de los problemas polinómicos es que surgen de manera natural al intentar aproximar problemas no lineales más complejos, y es por esto por lo que tienen una gran presencia en la industria y en otros ámbitos.

Los algoritmos más utilizados para la resolución de este tipo de problemas están basados en la misma idea que se utiliza para la resolución de los problemas lineales y enteros: la ramificación y acotación. En particular, la técnica RLT (Reformulation-Linearization Technique) es una implementación de un método de ramificación y acotación para problemas polinómicos.

Un elemento fundamental de este tipo de técnicas es la selección de la variable de ramificación. Debido a esto, en los últimos años, se ha estado investigando activamente en el uso de técnicas de aprendizaje que ayuden a mejorar dicha selección en el contexto de los problemas de programación lineal y entera (véase [2]). En este trabajo introducimos una forma de utilizar ese mismo tipo de técnicas en problemas de optimización no lineal, más concretamente, con el objetivo de realizar de manera más eficiente el *spatial branching* asociado a la resolución de este tipo de problemas. Para ello usaremos un sistema automático de selección del criterio de ramificación para la resolución de problemas de optimización polinómica mediante la técnica RLT.

## La técnica RLT

La técnica RLT fue originalmente desarrollada en [3] para la resolución de problemas polinómicos de optimización, de la forma

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \phi_0(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeto a} && \phi_r(\mathbf{x}) \geq \beta_r, \quad r = 1, 2, \dots, R_1, \\ &&& \phi_r(\mathbf{x}) = \beta_r, \quad r = R_1 + 1, \dots, R, \\ &&& \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{PO}$$

donde  $N = \{1, \dots, n\}$  denota el conjunto de variables, cada  $\phi_r(\mathbf{x})$  es un polinomio de grado  $\delta_r \in \mathbb{N}$  y  $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : 0 \leq l_j \leq x_j \leq u_j < \infty, \forall j \in N\} \subset \mathbb{R}^n$  es un hiperrectángulo que contiene a la región factible. Por tanto,  $\delta = \max_{r \in \{0, \dots, R\}} \delta_r$  es el grado del problema y  $(N, \delta)$  representa todos los posibles monomios de grado  $\delta$ .

La técnica está basada en la construcción de una relajación lineal del problema polinómico, que se resuelve a continuación utilizando un método de ramificación y acotación. Para ello, se sustituye cada monomio del problema por una variable; estas variables se llaman *variables RLT*. Por ejemplo, asociada al monomio  $x_1 x_2 x_4$  uno construiría la variable  $X_{124}$ . En general,

$$X_J = \prod_{j \in J} x_j. \tag{1}$$

En cada nodo del árbol de ramificación y acotación, se ramifica por una de las variables que violan las restricciones RLT de la forma (1). Consecuentemente, uno de los pasos cruciales del algoritmo es la elección de la variable por la cual se va a ramificar. Para este fin se utilizan los llamados criterios de ramificación. Éstos asignan una puntuación a cada variable, de forma que en función de dicha puntuación se puede elegir la variable más adecuada para la ramificación. Esta puntuación está basada en las violaciones de las restricciones (1), ponderadas por distintos valores como el rango de las variables, valores de la solución dual, etc.

Entre estos criterios están dos que se basan en el cálculo de valores de centralidad en grafos. En este caso, se le asigna al problema un grafo (uno donde los nodos son las variables y hay una arista entre dos nodos si las variables aparecen juntas en un monomio; otro donde los monomios son nodos, las restricciones son nodos, y la función objetivo es un nodo, y hay una arista entre nodos si el monomio aparece en la función objetivo o la restricción correspondiente), se calcula el vector de centralidad de autovalores del grafo y se le asigna a la variable su valor correspondiente en dicho vector.

## El aprendizaje

Elegir el criterio de ramificación tiene un impacto importante sobre el rendimiento del algoritmo. Así lo comprobamos resolviendo una serie de problemas utilizados

habitualmente en la literatura con todos los criterios. Para ello, utilizamos la implementación de la técnica RLT del solver RAPOSa (véase [1]), desarrollado en la Universidad de Santiago de Compostela. Todos los criterios que probamos en el trabajo eran el mejor en algún problema, y siempre había problemas donde no funcionaban bien. Así, si se pudiese elegir el mejor criterio para cada problema se ganaría en rendimiento del algoritmo. Eso es lo que presentamos en este trabajo: cómo utilizar técnicas de aprendizaje estadístico para detectar de alguna forma el mejor criterio en función de la estructura del problema.

Para ello, calculamos una serie de características del problema: número de variables, porcentaje de restricciones cuadráticas, propiedades de los grafos que construimos antes sobre el problema, etc. Sobre estas medidas, y utilizando una variable respuesta que representa el tiempo que se necesita para cerrar una unidad del gap (al ser un algoritmo de ramificación y acotación, en cada iteración del algoritmo hay una cota inferior y una superior para el problema original; el gap es la diferencia entre la cota inferior y la cota superior. En este caso, no es realmente la reducción del gap sino la reducción de la cota inferior, ya que la cota superior no siempre se logra calcular y queríamos poder calcular siempre la variable respuesta para el aprendizaje), ajustamos un modelo de regresión cuantil.

Los datos que teníamos para el entrenamiento provienen de tres librerías de problemas de optimización muy utilizadas en la literatura para pruebas de rendimiento de algoritmos y mejoras de los mismos. Juntando todos los problemas de las tres librerías, y habiendo calculado las variables explicativas para todos ellos, ajustamos el modelo utilizando *quantile regression forests*. La ventaja de este método es que permite utilizar la técnica *out-of-bag*, que devuelve una predicción de la variable respuesta para todos los datos, incluidos los que se utilizaron para entrenar al modelo. Esto lo puede hacer ya que está construyendo muchos árboles de decisión y puede utilizar aquellos en los que no aparezca el problema en cuestión para hacer la predicción.

Los resultados obtenidos son prometedores: se logra igualar o mejorar en rendimiento a lo que se obtendría si se escogiese el mejor criterio y se utilizase éste en la resolución de todos los problemas. Vemos en la Tabla 1 los resultados. Tenemos la media geométrica del tiempo necesario para cerrar una unidad del gap en tres casos: cogiendo un criterio para todos los problemas (el mejor globalmente), cogiendo el criterio aprendido y cogiendo el mejor criterio de ramificación para cada problema. Como vemos, del 43.4% que podríamos aprender, logramos mejorar un 31.4%, es decir, un 72% de lo que podríamos aprender como mucho.

## Conclusiones

En la técnica RLT, elegir bien el criterio de ramificación en función de las características del problema a resolver puede mejorar notablemente el rendimiento del algoritmo. Es por eso por lo que hemos presentado un algoritmo de Machine Learning que es capaz de elegir un criterio de ramificación basándose en propiedades

Tabla 1: Media geométrica del tiempo necesario para cerrar una unidad del gap.

<b>Best branching rule</b> (across all instances)	1.736
<b>Out-of-bag Q-RF</b>	1.191
<b>Optimal rule</b> (instance by instance)	0.983
<b>Improvement after learning</b> (with Q-RF)	31.4 %
<b>Optimal improvement</b> (upper bound for learning)	43.4 %

calculadas sobre el problema.

Con esto logramos un incremento de rendimiento en el algoritmo, implementado todo en el solver RAPOSa desarrollado en la Universidad de Santiago de Compostela. El objetivo es que este método de aprendizaje no sea sólo útil para este caso en particular, sino que se pueda también aplicar a otras configuraciones de la técnica RLT e incluso a otros algoritmos de optimización.

## Bibliografía

- [1] González-Rodríguez, B., Ossorio-Castillo, J., González-Díaz, J., González-Rueda, Á. M., Penas, D. R., and Rodríguez-Martínez, D. (2020). *Computational advances in polynomial optimization: Raposa, a freely available global solver*, Technical report, Optimization-online 7942.
- [2] Lodi, A. and Zarpellon, G. (2017). *On learning and branching: a survey*, Top, **25**(2), pp. 207–236.
- [3] Sherali, H. D. and Tuncbilek, C. H. (1992). *A global optimization algorithm for polynomial programming problems using a reformulation-linearization technique*, Journal of Global Optimization, **2**(1), pp. 101–112.

# Unha xornada de divulgación. “Matemáticas: habelas hainas, seguimos contándochas! 2021”

O mércores 24 de novembro de 2021 celebráronse as Xornadas *Matemáticas: habelas hainas, seguimos contándochas! 2021* dun xeito semipresencial, na Aula Magna da Facultade de Matemáticas e a través de Microsoft Teams. Este evento supón a quinta edición destas xornadas de divulgación que continúan a afianzarse no ámbito da nosa facultade.

Ditas xornadas, promovidas pola Comisión de Normalización Lingüística da Facultade de Matemáticas e organizadas polo Comité do SII co apoio económico do Servizo de Normalización Lingüística, buscan a normalización do galego no ámbito tanto das matemáticas coma da divulgación científica. Tendo en conta este obxectivo, a principal esencia das comunicacións orais consiste en amosar problemas ou aplicacións das matemáticas que están presentes ou relacionados coa investigación levada a cabo na nosa facultade.

Durante a xornada, tiveron lugar sete charlas de temática diversa, a cargo de doutorandos e investigadores novos, e asociadas a diferentes ramas das matemáticas, representando as distintas áreas de investigación presentes no noso centro.

As contribucións orais coas que se contou neste evento foron as seguintes:

- **“Matemáticas a través do espello”**, por M. Pilar Páez Guillán.

Todos os nenos, a primeira vez que se miran nun espello, quedan abraiados e preguntáanse quen será esoutro cativo que está fronte a eles. Logo acostúmanse a viviren rodeados de espellos e finalmente enténdenos. Algúns destes nenos, ao medraren, deciden estudar Matemáticas, e experimentan un proceso similar ao do espello cando lles explican o espazo dual. Nesta charla intentaremos entender as semellanzas entre estes dous obxectos e ver que, igual ca os espellos, o espazo dual agárdanos nos lugares máis insospeitados.

- **“Catálogos, anuarios e bases de datos astronómicos”**, por Xabier Pérez Couto.

Nesta charla falaremos da orixe e evolución dos diferentes catálogos astronómicos ao longo da historia, os cales constitúen unha das primeiras publicacións

científicas da antigüidade. Comezaremos abordando os de maior relevancia histórica, desde as primeiras recompilacións de estrelas da Antiga Mesopotamia, ata as primeiras listaxes de obxectos astronómicos do ceo profundo, como o de sobra coñecido Catálogo Messier. A continuación, trataremos os máis empregados na actualidade polos científicos, tanto no eido da divulgación (anuarios) como no da investigación (bases de datos).

- **“Vide ver a Terra xirar”**, por María Ferreiro Subrido.

Así convidou Jean Bernard León Foucault ao pobo francés a presenciar a súa famosa demostración da rotación do noso planeta no ano 1851. O experimento do que se valeu para probar tal fenómeno non foi máis que a observación do comportamento do plano de oscilación dun péndulo en movemento. A idea desta charla é que nos achegemos un chisco á modelización en xeometría diferencial para describir xeometricamente ese comportamento. Matemáticas, habelas hainas, tamén detrás da demostración da rotación da Terra!

- **“Sexamos positivas!”**, por Lorena Saavedra López.

A positividade é unha gran filosofía de vida, pero tamén é unha característica moi importante dalgunhas funcións usadas en modelizacións sobre situacións da vida real. Nesta charla centrarémonos na importancia de garantir que as solucións de certos problemas sexan positivas. Porén, todo en exceso é malo, polo que tanto nós como as nosas funcións buscamos ser positivas, pero sen pasarnos. Isto quere dicir que intentaremos obter solucións positivas, pero que alcancen valores o máis pequenos posibles. Aplicaremos os diferentes resultados para ser do 44,77% dos matemáticos que, como di Eduardo Sáenz de Cabezón na súa charla TED, afirman que “si no sabes matemáticas se te cae el puente?”.

- **“Todos os camiños levan á topoloxía”**, por David Mosquera Lois.

Nesta charla comezaremos por presentar un problema da robótica e do deseño de algoritmos. A continuación, tentaremos formalizalo en termos matemáticos. Veremos como iso nos leva de xeito natural ao estudo da topoloxía.

- **“As matemáticas nas bucinas de Nacho Porto”**, por Sara Recondo Estévez.

É cotián escoitar que as matemáticas están en todo o que nos rodea, pero poderíase pensar que teñen cabida dentro da arte cerámica? Nun dos TFM's propostos no Mestrado de Matemática Industrial embarcámonos co ceramista galego Nacho Porto na aventura de caracterizar o comportamento acústico das súas bucinas cerámicas mediante o modelado matemático e a simulación numérica. O obxectivo principal deste proxecto consistiu en cuantificar as respostas físicas e o comportamento acústico que Nacho percibía sobre as súas bucinas, permitíndolle coñecer mellor os seus produtos e apreciar, por exemplo, a grande influencia que certos aspectos da etapa de deseño poden ter no seu xeito de soar.

- **“Axudando a Pepa A Loba”**, por Andrea Vilar Álvarez.

Pepa A Loba foi unha bandoleira galega de finais do século XIX, arquetipo do denominado ?bandoleirismo xeneroso?, que lles roubaba ós caciques para logo repartir o botín entre as clases sociais máis desfavorecidas. Neste 2021, Pepa actualizou o seu modus operandi e xa non asalta incautos nos camiños, senón que intenta vencer as máquinas comecartos dos casinos? pero non está a darlle moi bos resultados! Seremos quen de formar parte da banda da Loba por uns intres e deseñar unha estratexia que lle permita obter beneficios nun tempo razoable?

A información anterior, incluíndo diversos vídeos sobre as xornadas, está dispoñible en: <https://www.usc.gal/gl/servizos/snl/dinamizacion/habelashainas2021.html>.



# Agradecementos

O Comité Organizador do SII deste curso académico 2021/2022 quere agradecer a colaboración de todas e cada unha das persoas que fan posible que este seminario goce de tan boa saúde e continúe a ser un referente dentro e fóra da nosa Universidade.

En primeiro lugar, gustaríanos agradecer o traballo do Instituto de Matemáticas, por ser soporte e facer posible que este seminario se realizara durante todos estes anos; e a todos os seus directores, secretarios e persoal de administración pola súa incansable colaboración.

Este curso o Seminario de Iniciación á Investigación comeza unha nova andaina ao integrarse no Centro de Investigación e Tecnoloxía Matemática de Galicia (CIT-MAga). Queremos agradecer especialmente o apoio por parte de Rosa Crujeiras Casais e Ariana Fuentes Enjamio.

Grazas á Facultade de Matemáticas, por ter proporcionado un fogar para o SII ao longo de todos estes anos.

Por suposto, tamén debemos agradecer ás e aos relatores desta edición do seminario, sen os cales nada disto sería posible. Grazas a: Tomás Otero Casal, Diego Bolón Rodríguez, Brais Ramos Pérez, Sabina Pelerino Rodés, Jose Luis Carmona Jiménez, Mariña Canabal Juanatey, Miguel Picos Maiztegui, Saúl Estévez Cuntín, Filipe Soares, Sara Rodríguez Pastoriza, Andrés Pérez Rodríguez, Sergio Herrero Vila, Iria Rodríguez Acevedo, Mouhcine Yousfi e Ignacio Gomez Casares. Ademais, agradecemos ao noso compañeiro, Daniel Cao Labora, a elaboración do prefacio destas actas.

Un ano máis, estendemos os nosos agradecementos ás e aos relatores da quinta edición das xornadas de divulgación Matemáticas: habelas hainas. Referímonos a: María Pilar Paez Guillán, Xabier Pérez Couto, María Ferreiro Subrido, Lorena Saavedra López, David Mosquera Lois, Sara Recondo Estévez e Andrea Vilar Álvarez. Tamén facemos extensivo o agradecemento á Facultade de Matemáticas, ao Servizo de Normalización Lingüística e a Comisión de Normalización Lingüística, pola súa colaboración na organización deste evento. Por último, tamén queremos agradecer o seu labor a Elena Vázquez Abal, quen foi un ano máis a responsable do deseño do cartel da xornada.

Santiago de Compostela, setembro de 2022

O Comité Organizador do SII

