

**ACTAS DO SEMINARIO**

**DE**

**INICIACIÓN Á INVESTIGACIÓN**

**CURSO 2020 – 2021**

**Editores:**

Laura Davila Pena

Érika Diz Pita

M<sup>a</sup> Pilar Páez Guillán

Alberto Rodríguez Vázquez

© 2021 Seminario de Iniciación á Investigación.  
Instituto de Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela

**Coordina:**

Seminario de Iniciación á Investigación (SII)  
*seminarios3c@gmail.com*

**Edita:**

Instituto de Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela

**Imprime:**

Imprenta Universitaria  
Pavillón de Servizos s/n  
Campus Vida  
15782 Santiago de Compostela  
A Coruña

**ISSN:** 2171-6536

**Depósito Legal:** C 1645-2021

*Young man, in Mathematics you don't understand things.  
You just get used to them.*

John von Neumann (1903 – 1957)

*Don't worry about your difficulties in Mathematics. I can  
assure you mine are still greater.*

Albert Einstein (1879 – 1955)



# Prefacio

Cuando en 2012 empecé a trabajar en la Facultad de Matemáticas, no tardé en descubrir el Seminario de Iniciación á Investigación (SII) y desde el primer momento me pareció una actividad muy interesante. No solamente por la importancia de conocer y valorar “as matemáticas do veciño”, sino también por la forma en la que esto se lleva a cabo. Su formato informal resulta un soplo de aire fresco en la manera de presentar las matemáticas y su perspectiva de iniciación a la investigación, siembra las semillas de su propio futuro, así como del resto de la facultad.

Por todo esto, cuando unos meses después de mi llegada a la Facultad de Matemáticas, tuve la oportunidad de formar parte del Comité Organizador, acepté sin dudar. No me sentía para nada preparado, pero no podía dejar pasar la oportunidad de poner mi granito de arena para que este proyecto siguiese hacia adelante. Y no me arrepiento para nada, pues fue una gran experiencia que repetiría sin dudar. Durante los tres años que participé como organizador, fue un tiempo de gran aprendizaje en el que yo mismo me inicié en las malas artes de la investigación. Con la inestimable ayuda del resto de miembros del aquel entonces Comité Organizador, en el seminario presenté a conferenciantes (por primera vez), di una charla (por primera vez), corregí actas (por primera vez), etc. Algunas veces con más atino que otras, como en cualquier proceso de aprendizaje, pero siempre, tratando de mantener vivos los valores con los que la actividad se puso en marcha en el año 2005.

Ahora, se me brinda de nuevo la oportunidad de contribuir escribiendo este prefacio, lo cual me hace gran ilusión y por lo que estoy muy agradecido al actual Comité. Y la verdad, me resulta cuanto menos curioso cómo el SII me ofrece de nuevo la oportunidad de hacer algo que nunca había hecho antes, para lo que no me siento preparado y a lo que no me sé (ni quiero) negar. Por eso quiero cerrar este prefacio, no solo animando al lector a interesarse por las matemáticas de sus vecinos, sino también a participar activamente y aprender. Ya sea como asistente, conferenciante u organizador, pues todos esos papeles son importantes para que el SII siga funcionando como dinamizador de la juventud investigadora de la Facultad. Así que, ponédselo fácil a los organizadores y dejad que os lén, vale la pena.

Santiago de Compostela, septiembre de 2021

Jorge Albella Martínez



# Índice xeral

<b>María Ferreiro Subrido</b> “Conectando espazos tanxentes”	<b>3</b>
<b>Fernando Castro Prado</b> “Contrastes de independencia para datos genómicos de alta dimensión”	<b>9</b>
<b>Nerea González Barral</b> “Módulos planos”	<b>15</b>
<b>Javier Iglesias Pérez</b> “Detección del caos en sistemas dinámicos”	<b>21</b>
<b>Raúl Pino Velasco</b> “La constante de Kottman”	<b>27</b>
<b>Nerea Martínez López</b> “Predecir la carga de un coche eléctrico no es tarea sencilla”	<b>33</b>
<b>Juan Manuel Lorenzo Naveiro</b> “La geometría del grupo de Heisenberg”	<b>39</b>
<b>Carlos García Meixide</b> “Distance covariance and optimal transport in high energy physics”	<b>45</b>
<b>Patricia Guerra Balboa</b> “Cómo la teoría de haces puede ayudar en la torre de control de un aeropuerto”	<b>51</b>
<b>Antonio Álvarez López</b> “Formación de singularidades en las ecuaciones de Euler de fluidos”	<b>57</b>
<b>José Miguel Balado Alves</b> “Recíproco del Teorema Egregium”	<b>63</b>
<b>Adrián González Maestro</b> “Optimización do circuito de pacientes no hospital de día de oncoloxía de Santiago”	<b>69</b>
<b>Unha xornada de divulgación.</b> “Matemáticas: habelas hainas, seguimos contándochas! 2020”	<b>75</b>
<b>Agradecementos</b>	<b>79</b>



# Introdución

O Seminario de Iniciación á Investigación (SII) leva xa unha traxectoria de 15 anos, dende que algúns alumnos do Terceiro Ciclo da Facultade de Matemáticas o iniciaron no 2005.

Foron moitos os estudantes de doutoramento que dende entón foron pasando polo Comité do SII, herdando o compromiso que os seus fundadores amosaron coa creación deste Seminario, que buscaba cumprir con algúns obxectivos de especial importancia entre os mozos investigadores. En primeiro lugar, o intercambio de coñecemento, e especialmente a posibilidade de dar a coñecer os distintos campos nos que cada un estaba desenvolvendo as súas investigacións. Tamén favorecer a práctica de falar en público, de dar charlas e de aprender a escoitar aos compañeiros e participar activamente. En definitiva, o SII proporcionou sempre un marco onde poder levar a cabo as actividades necesarias para que cada quen saiba explicar as ideas fundamentais dos seus traballos incluso a persoas non especialistas no seu campo.

É imposible que unha área das matemáticas progrese se as achegas que se fan nela quedan esquecidas nos caixóns ou ordenadores dos seus descubridores. A comunicación entre os investigadores é fundamental, e tamén o é a interdisciplinaridade, sobre todo entre os que comezan as súas carreiras investigadoras.

As actividades deste Seminario, que sempre tiveron lugar na Facultade de Matemáticas, abrironse paso este ano tamén a través da rede, permitindo que todos puidésemos seguir aproveitando esta experiencia a pesar das especiais circunstancias que atravesamos.

Tanto as sesións quincenais que constitúen a actividade fundamental do SII, como a xornada de divulgación “Matemáticas: habelas hainas, seguimos contándochas! 2020” están abertas a todo o mundo e son un lugar para a discusión, o afloramento de ideas e a vida social na Facultade alén da rutina investigadora ou docente. Nelas, profesores, alumnos e investigadores teñen a oportunidade de coñecerse, emprender proxectos comúns e descubrir novos intereses.

No referente á organización do SII, o Comité Organizador durante este curso estivo formado por catro estudantes de doutoramento, que se encargaron tanto da coordinación dos eventos, coa elaboración do calendario de charlas, anuncio das mesmas, reserva de aulas e emisión pola plataforma Microsoft Teams, etc.; como da publicación deste anuario, onde se recolle un resumo de cada unha das charlas impartidas. Este mesmo Comité Organizador encargouse da confección deste volume

e figura nel como Comité Editorial. Ademais é importante salientar que cada un dos resumos aquí recollidos pasou un proceso de revisión no que interveñen os propios poñentes de forma anónima así como os membros do Comité, realizándose sucesivas revisións por persoas da mesma e de distintas áreas de coñecemento que a do autor, co obxectivo de que así os resumos sexan comprensibles por aqueles que non son expertos no campo correspondente.

## Conectando espazos tanxentes

Área de Xeometría e Topoloxía

María Ferreiro Subrido

Universidade de Santiago de Compostela

14 de outubro de 2020

### Notación

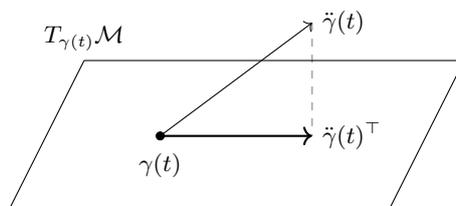
Unha *variedade riemanniana* de dimensión  $n$  é unha  $n$ -variedade diferenciable  $\mathcal{M}$  dotada dun tensor métrico riemanniano  $g$  (i.e., un tensor de tipo  $(0, 2)$  simétrico e definido positivo) e denótase mediante o par  $(\mathcal{M}, g)$ . Sen máis especificacións, unha *curva* nunha variedade  $\mathcal{M}$  vai ser para nós unha curva regular parametrizada; isto é, unha aplicación diferenciable  $\gamma: I \rightarrow \mathcal{M}$ , onde  $I \subset \mathbb{R}$  é un certo intervalo.

Para fixar a notación relativa a variedades diferenciables, denotaremos o espazo tanxente a unha variedade  $\mathcal{M}$  nun punto  $p \in \mathcal{M}$  como  $T_p\mathcal{M}$ . O fibrado tanxente a unha variedade, que non é máis que a unión disxunta de todos os espazos tanxentes á variedade, denotarase por  $T\mathcal{M}$ . Ademais, se  $(x^1, \dots, x^n)$  son coordenadas locais en  $\mathcal{M}$ , denotaremos os campos de vectores coordenados mediante  $\partial_i$  ou  $\partial_{x^i}$ . O conxunto  $\{\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}\}$  constitúe unha base do espazo tanxente á variedade en cada punto.

En todo o resumo empregarase a convención de Einstein de índices repetidos para denotar sumas.

### O problema de derivar campos de vectores en variedades

Consideremos unha  $n$ -variedade diferenciable  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq n$ , coa métrica riemanniana inducida pola métrica usual de  $\mathbb{R}^m$  (por exemplo,  $\mathcal{M} = \mathcal{S}$  unha superficie regular en  $\mathbb{R}^3$ ). Se  $\gamma: I \rightarrow \mathcal{M}$  é unha curva regular en  $\mathcal{M}$ , un xeito de calcular a súa aceleración neste contexto é calcular a aceleración euclidiana, i.e., a segunda derivada usual  $\ddot{\gamma}(t)$  en  $\mathbb{R}^m$ , e proxectala ortogonalmente sobre o espazo tanxente  $T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$ .

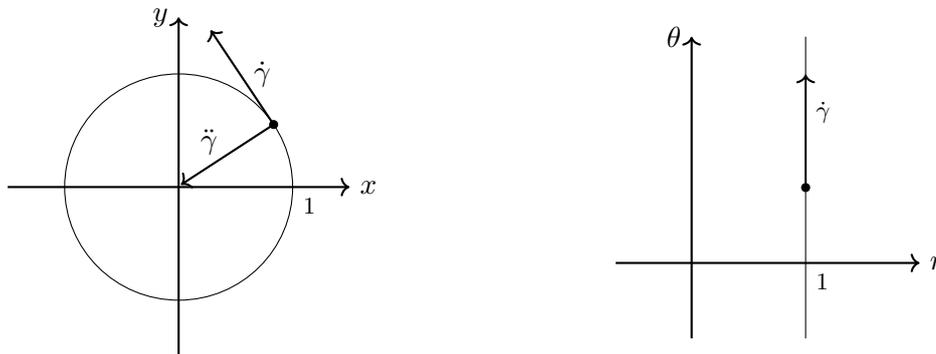


Isto proporciónanos un campo de vectores  $\dot{\gamma}(t)^\top$  tanxente a  $\mathcal{M}$ , a *aceleración tanxencial* da curva  $\gamma$ . Non é difícil comprobar que esta definición é invariante por movementos ríxidos de  $\mathbb{R}^m$  (rotacións e translacións), pero non hai razón para pensar que se trata dun invariante intrínseco de  $\mathcal{M}$  (i.e., que depende unicamente da xeometría de  $\mathcal{M}$  coa métrica inducida).

Por outra banda, nunha variedade riemanniana abstracta, na que non hai un “espazo ambiente” euclidiano, non podemos definir a aceleración dunha curva desta maneira, polo que cómpre atopar outro xeito de darlle un significado á aceleración dunha curva sen a necesidade de “saír” da variedade para calculala.

Sexa  $\gamma: I \rightarrow \mathcal{M}$  unha curva regular nunha variedade  $\mathcal{M}$ . O vector velocidade da curva,  $\dot{\gamma}(t)$ , ten un significado independente das coordenadas consideradas na variedade para cada  $t \in I$  e a súa expresión, en calquera sistema de coordenadas, correspóndese coa noción de velocidade dunha curva en  $\mathbb{R}^m$ :  $\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}^1(t), \dots, \dot{\gamma}^m(t))$ . Non ocorre así se falamos da aceleración.

**Exemplo 1.** Consideremos a circunferencia unitaria no plano  $\mathbb{R}^2$  dada en coordenadas euclidianas como  $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ . A súa aceleración en tempo  $t$  é o vector unitario  $(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = (-\cos t, -\sin t)$ . Se reparametrizamos a circunferencia en coordenadas polares  $(r(t), \theta(t)) = (1, t)$  vemos que a súa aceleración nun tempo  $t$  é  $(\ddot{r}(t), \ddot{\theta}(t)) = (0, 0)$ .



Cal é o problema?

O problema é o seguinte: se queremos obter a aceleración nun tempo  $t_0$  derivando  $\dot{\gamma}(t)$  do xeito usual, é preciso que calculemos o límite

$$\ddot{\gamma}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t_0)}{t - t_0},$$

pero os vectores  $\dot{\gamma}(t_0)$  e  $\dot{\gamma}(t)$  viven en espazos vectoriais distintos ( $T_{\gamma(t_0)}\mathcal{M}$  e  $T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$ , respectivamente), polo que non ten sentido restalos.

A velocidade dunha curva nunha variedade é un exemplo de campo de vectores ao longo dunha curva. Para interpretar a aceleración, é preciso atopar un xeito de derivar campos de vectores ao longo de curvas de maneira invariante. Para iso, é necesario dispoñer dun xeito de comparar valores de campos de vectores en puntos diferentes ou, intuitivamente, “conectar” espazos tanxentes. É aquí onde entran en

xogo as conexións, como unha regra para calcular derivadas direccionais de campos de vectores.

Unha *conexión linear* nunha variedade  $\mathcal{M}$  é unha conexión en  $T\mathcal{M}$ , é dicir, unha aplicación

$$\nabla: T\mathcal{M} \times T\mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}, \quad (X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

que satisfai as seguintes propiedades:

1.  $\nabla$  é  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ -linear na primeira compoñente:

$$\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y, \text{ para } f, g: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \text{ diferenciables.}$$

2.  $\nabla$  é  $\mathbb{R}$ -linear na segunda compoñente:

$$\nabla_X(aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2, \text{ para } a, b \in \mathbb{R}.$$

3.  $\nabla$  satisfai a seguinte regra do produto:

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y, \text{ para } f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}).$$

En coordenadas, se  $(x^1, \dots, x^n)$  é un sistema local de coordenadas en  $\mathcal{M}$ , para calquera índices  $i$  e  $j$  podemos escribir  $\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j}$  en coordenadas como

$$\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = \Gamma_{ij}^k \partial_{x^k}.$$

Isto define  $n^3$  funcións  $\Gamma_{ij}^k$ , chamadas *símbolos de Christoffel* da conexión  $\nabla$ .

### Derivada covariante ao longo de curvas e transporte paralelo

Sexa  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$  unha curva. Nun tempo  $t \in I$  a súa velocidade  $\dot{\gamma}(t)$  está invariante definida por  $\gamma_*(d/dt)$ , onde  $\gamma_*$  denota a diferencial de  $\gamma$ , que actúa sobre funcións da forma

$$\dot{\gamma}(t)f = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t).$$

Como se dixo antes, isto correspóndese coa noción usual de velocidade en coordenadas. Se escribimos  $\gamma$  en coordenadas como  $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ , entón

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}^i(t)\partial_i.$$

Un *campo de vectores ao longo dunha curva*  $\gamma: I \rightarrow \mathcal{M}$  é unha aplicación diferenciable  $V: I \rightarrow T\mathcal{M}$  tal que  $V(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$  para cada  $t \in I$ . Por exemplo, dado un campo de vectores diferenciable  $\tilde{V} \in T\mathcal{M}$ , o campo de vectores dado por  $V(t) = \tilde{V}_{\gamma(t)}$  para cada  $t \in I$  é un campo de vectores diferenciable ao longo de  $\gamma$ . Un campo de vectores ao longo dunha curva dise *extensible* se existe un campo de vectores  $\tilde{V}$  nunha veciñanza da imaxe da curva relacionado con el do xeito anterior.

**Observación 1.** *Non todo campo de vectores ao longo dunha curva é extensible; por exemplo, se  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$  pero  $\dot{\gamma}(t_1) \neq \dot{\gamma}(t_2)$ , entón  $\dot{\gamma}$  non é extensible.*

Se denotamos por  $\mathcal{T}(\gamma)$  o conxunto dos campos de vectores tanxentes a  $\mathcal{M}$  ao longo de  $\gamma$  e  $\nabla$  é unha conexión linear en  $\mathcal{M}$ , para cada curva  $\gamma: I \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $\nabla$  determina un único operador

$$D_t: \mathcal{T}(\gamma) \rightarrow \mathcal{T}(\gamma)$$

que satisfai as seguintes propiedades:

1.  $\mathbb{R}$ -linearidade:

$$D_t(aV + bW) = aD_tV + bD_tW, \text{ para } a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Regra do produto:

$$D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV, \text{ para } f \in C^\infty(I).$$

3. Se  $V$  é extensible, daquela para cada extensión  $\tilde{V}$  de  $V$ ,  $D_tV(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\tilde{V}$ , polo que, se  $V(t) = V^j(t)\partial_j$  nunha veciñanza de  $t_0 \in I$ , entón

$$\begin{aligned} D_tV(t_0) &= \dot{V}^j(t_0)\partial_j + V^j(t_0)\nabla_{\dot{\gamma}(t_0)}\partial_j \\ &= \left( \dot{V}^k(t_0) + V^j(t_0)\dot{\gamma}^i(t_0)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t_0)) \right) \partial_k. \end{aligned}$$

Unha demostración da anterior afirmación pode verse en [3, páx. 57].

Estamos agora en condicións de definir por fin a aceleración dunha curva nunha variedade.

**Definición 1.** *Se  $\mathcal{M}$  é unha variedade cunha conexión linear  $\nabla$  e  $\gamma$  é unha curva en  $\mathcal{M}$ , defínese a súa aceleración como o campo de vectores  $D_t\dot{\gamma}$  ao longo de  $\gamma$ .*

Esta definición de aceleración permítenos xeneralizar as rectas dos espazos euclidianos (aquelas curvas con segunda derivada nula) a variedades. Deste xeito, dicimos que unha curva é *xeodésica* se a súa aceleración, no sentido da definición anterior, é identicamente nula. Do mesmo xeito, tamén podemos xeneralizar os campos de vectores paralelos dos espazos euclidianos (os campos de vectores constantes, é dicir, con derivada nula) a variedades, dicindo que un campo de vectores  $V \in \mathcal{T}(\gamma)$  é *paralelo ao longo de  $\gamma$*  respecto da conexión  $\nabla$  se  $D_tV \equiv 0$ . Deste xeito, as xeodésicas poden caracterizarse como as curvas cuxa velocidade é paralela ao longo delas.

Un feito fundamental sobre os campos de vectores paralelos é que calquera vector tanxente en calquera punto dunha curva pode estenderse de maneira única a un campo de vectores paralelo ao longo de toda a curva, como mostra o seguinte resultado:

**Teorema 1** (Existencia e unicidade do transporte paralelo). *Dada unha curva  $\gamma: I \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $t_0 \in I$ , e un vector  $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}\mathcal{M}$ , existe un único campo de vectores paralelo  $V$  ao longo de  $\gamma$  tal que  $V(t_0) = V_0$ . O campo de vectores  $V$  denomínase **transporte paralelo** de  $V_0$  ao longo de  $\gamma$ .*

Para rematar, se  $\gamma: I \rightarrow \mathcal{M}$  é unha curva e  $t_0, t_1 \in I$ , o transporte paralelo define un operador

$$P_{t_0 t_1}: T_{\gamma(t_0)}\mathcal{M} \rightarrow T_{\gamma(t_1)}\mathcal{M}$$

establecendo  $P_{t_0 t_1} V_0 = V(t_1)$ , sendo  $V$  o transporte paralelo de  $V_0$  ao longo de  $\gamma$ . Non é difícil comprobar que se trata dun isomorfismo linear entre os espazos tanxentes  $T_{\gamma(t_0)}\mathcal{M}$  e  $T_{\gamma(t_1)}\mathcal{M}$ . Ademais, se  $\nabla$  é unha conexión linear na variedade, a derivada covariante ao longo de  $\gamma$  pode recuperarse do transporte paralelo a través do límite

$$D_t V(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{P_{t_0 t}^{-1} V(t) - V(t_0)}{t - t_0},$$

que non é máis que unha modificación da definición usual de derivada. Isto é polo que as conexións conectan espazos tanxentes cercanos.

## Bibliografía

- [1] do Carmo, M. P. (1995). *Geometría diferencial de curvas y superficies*, 4ª edición, Alianza Editorial, Madrid.
- [2] Hernández Cifre, M. A. y Pastor González, J.A. (2010). *Un curso de geometría diferencial*, CSIC Press, Madrid.
- [3] Lee, J. M. (1997). *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Graduate Texts in Mathematics **176**, Springer, Berlin.





## Contrastes de independencia para datos genómicos de alta dimensión

Área de Estadística e Investigación Operativa

Fernando Castro Prado

Universidade de Santiago de Compostela

28 de octubre de 2020

### Motivación del trabajo

En este trabajo se sintetiza lo esencial del Trabajo de fin de máster [2]. En la motivación biológica que sigue a continuación, a diferencia de en aquel trabajo, se va a usar terminología accesible para lectores no especializados, realizando en algún caso algún sacrificio menor del rigor terminológico genético.

### Epistasis en trastornos complejos

Las enfermedades complejas comunes (cánceres, diabetes, artritis...) están causadas por la combinación de factores genéticos y ambientales, siendo el efecto individual de cada uno de ellos muy pequeño. Los modelos aditivos no bastan para explicar la susceptibilidad genética a padecerlas, siendo importante considerar las interacciones gen-gen (la denominada epistasis) de cara a desenmascarar la “heredabilidad perdida”, es decir, la incapacidad para explicar la causalidad de estas enfermedades.

El Grupo de Genética Psiquiátrica del Instituto de Investigación Sanitaria de Santiago de Compostela (IDIS) dispone de datos de estudios de asociación caso-control a lo largo del genoma para esquizofrenia, lo cual quiere decir que se han realizado las técnicas bioquímicas necesarias para determinar qué información portan en su ADN personas “enfermas” (llamadas *casos*) y “sanas” (o *controles*). El desafío estadístico que desde el IDIS se plantea es usar esta información para detectar pares de variantes genéticas que “protejan” frente a esquizofrenia o que “hagan más probable” tenerla.

Los datos disponibles se refieren a un cierto tipo de variantes genéticas conocidas como *polimorfismos de un único nucleótido* (SNP) autosómicos. A efectos prácticos, lo importante para el desarrollo posterior del trabajo es que estas variantes se caracterizan por el hecho de que cada individuo puede contar con cero, una o dos copias del SNP. Traduciendo lo anterior al lenguaje de la estadística matemática, trabajar con datos de SNP equivale a estudiar variables *ternarias* (es decir, discretas con

---

PALABRAS CLAVE: medidas de asociación; correlación de distancias; epistasis; genómica; inferencia estadística en alta dimensión; esquizofrenia.

soporte de cardinal 3) en un contexto de altísima dimensión en relación al tamaño muestral.

### Herramientas para la detección de epistasis

Detectar las interacciones no consiste más que en contrastar la independencia entre dos variables, en este caso SNP. Históricamente, la primera forma de llevar a cabo esta labor fue el test ji-cuadrado de Pearson. Más de un siglo después, la estadística matemática actual ofrece bastantes formas de detectar la epistasis. Esto, unido a cuestiones computacionales, explica la amplia variedad de herramientas bioinformáticas que existen solo para esta tarea. En concreto, uno puede hallar hasta un centenar de ellas en la bibliografía especializada. Sin embargo, todas ellas presentan defectos.

### Test de correlaciones a gran escala (LCT)

Son varios los paquetes que, como [7], están basados en la búsqueda de comportamientos distintos en la correlación (de Pearson) entre casos y controles, lo que tiene cierto sentido cuando los datos son continuos.

#### Introducción a los LCT

Un método que soluciona las deficiencias teóricas de [7] es el de Cai y Liu [1]. Básicamente, hacen lo mismo, es decir, un test de correlaciones de Pearson para cada par de variables  $(i, j)$ :

$$\begin{cases} H_{0ij} : \rho_{ij1} = \rho_{ij2}, \\ H_{1ij} : \rho_{ij1} \neq \rho_{ij2}, \end{cases}$$

pero calibrando bien las distribuciones y controlando los falsos descubrimientos.

#### Inadecuación de los LCT a los datos de SNP

En el artículo anterior, los autores obtuvieron una cierta matriz de adyacencia de la red epistática para cáncer de próstata, resultados que carecían de interpretación biológica. Si los datos estudiados son los de SNP de esquizofrenia, marcadamente discretos, se da una situación muy distinta: las únicas entradas no nulas están en la diagonal o cerca, lo que indica que únicamente se están detectando pares de posición cromosómica muy próxima. Tales hallazgos carecen de utilidad práctica, pues no reflejan una asociación vinculada al trastorno complejo estudiado, sino mero desequilibrio de ligamiento.

### Correlación de distancias en espacios métricos generales

Por los motivos anteriores, es preciso trascender la correlación de Pearson en busca de la caracterización general de la independencia en espacios métricos, que

viene dada por la *correlación de distancias*, en el marco de la *energía de los datos* [9].

Si bien lo anterior cuenta con firmes fundamentos teóricos, en [8], donde se presenta la correlación de distancias en espacios métricos, se omiten tantos pasos intermedios que, durante años, pasó inadvertida la falsedad de los resultados teóricos que ahí se presentan. Tanto es así que en 2017 se publicó un trabajo de 150 páginas [6] que solo contiene la corrección de errores de las 10 páginas del artículo original.

Para una revisión más detallada de estas cuestiones, véase [4].

### Formulación general del problema no paramétrico de independencia

Recordemos que dos sucesos  $A$  y  $B$  son independientes si la probabilidad de que ocurran  $A$  y  $B$  es igual a la probabilidad de  $A$  por la de  $B$ . Y esta es la idea que subyace a la siguiente notación:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \mu \times \nu, \\ H_1 : \theta \neq \mu \times \nu, \end{cases}$$

donde:

- $X \sim \mu := \theta \circ \pi_1^{-1}$ , marginal en  $\mathcal{X}$ ; con  $\pi_1 : (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \mapsto x \in \mathcal{X}$ ;
- $Y \sim \nu := \theta \circ \pi_2^{-1}$ , marginal en  $\mathcal{Y}$ ; con  $\pi_2 : (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \mapsto y \in \mathcal{Y}$ ,

para el caso general en que

$$\theta : \mathcal{B}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \longrightarrow [0, 1]$$

es la distribución de  $Z = (X, Y)$ , elemento aleatorio de  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ , siendo  $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$  e  $(\mathcal{Y}, d_{\mathcal{Y}})$  dos espacios métricos separables arbitrarios.

### Definición formal de dcov

Dada una medida de Borel de  $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$  con primeros momentos finitos  $\mu$ , la distancia  $d_{\mathcal{X}}$  doblemente  $\mu$ -centrada es:

$$\begin{aligned} d_{\mu} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\mapsto d_{\mathcal{X}}(x_1, x_2) - a_{\mu}(x_1) - a_{\mu}(x_2) + D(\mu), \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} a_{\mu} : \mathcal{X} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int d_{\mathcal{X}}(x, x') \, d\mu(x'); \end{aligned} \quad \text{y} \quad D(\mu) := \int a_{\mu} \, d\mu = \int d_{\mathcal{X}} \, d\mu \times \mu.$$

Con la notación anterior:

$$\text{dcov}(\theta) := \int_{(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})^2} d_\mu(x, x') d_\nu(y, y') d\theta^2((x, y), (x', y')), \theta \in M_1^{1,1}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}),$$

donde, como anteriormente,  $\mu := \theta \circ \pi_1^{-1}$  y  $\nu := \theta \circ \pi_2^{-1}$ .

El interés de esta medida de asociación reside en que se anula si y solo si hay independencia (en cierto tipo de espacios favorables a ello, llamados *de tipo negativo fuerte*), cosa que no puede decirse de la correlación de Pearson.

## Propuesta de test basado en la correlación de distancias

### Correlación de distancias en espacios de cardinal 3

En lo sucesivo,  $\{0, 1, 2\}$  serán las etiquetas de los tres posibles genotipos para cada SNP. No hay ninguna razón biológica para considerar que dos copias del alelo menos frecuente afectan el doble que una, bien sea aumentando o disminuyendo la susceptibilidad a padecer alguna enfermedad compleja. Por tanto, es interesante dotar el espacio  $\{0, 1, 2\}$  de una distancia que no sea la euclidiana, como, por ejemplo, la distancia equilátera:

$$d(0, 1) = d(1, 2) = d(0, 2) = 1,$$

o aquellas en las que dos de los vértices del triángulo coinciden:

- $d(0, 1) = 0; d(0, 2) = d(1, 2) = 1;$
- $d(0, 2) = 0; d(0, 1) = d(2, 1) = 1;$
- $d(1, 2) = 0; d(1, 0) = d(2, 0) = 1.$

### Contraste de hipótesis propuesto

La idea general del método propuesto para la detección de la epistasis consiste en contrastar independencia en casos y controles, viendo dónde hay diferencias, en el marco matemático expuesto anteriormente.

Es destacable que la aplicación de la correlación de distancias a datos discretos (genómicos o no) apenas cuenta con precedentes bibliográficos. Y es aun más novedosa, si cabe, la realización de *tests múltiples a gran escala* empleando la *energía de los datos*.

### Aplicación a datos de SNP

Para acabar, explicaremos brevemente uno de los experimentos realizados para obtener resultados interpretables biológicamente: el estudio particular del SNP

*rs13107325*, que, de todos los SNP humanos, es el más claramente asociado a esquizofrenia.

Tras elegir la distancia más apropiada utilizando módulos de coexpresión espacio-temporal en el cerebro [5], tres interacciones destacan por encima del resto. De ellas, la presunta interacción con *rs2075756* resulta muy plausible biológicamente porque uno activa y otro inhibe la ruta de señalización NF- $\kappa$ B, la cual está implicada en inmunidad. Esto es coherente con las sospechas fundadas de una respuesta inmune anormal en esquizofrenia.

Sin embargo, los otros dos descubrimientos son falsos positivos. Teniendo en cuenta que la probabilidad *a priori* de hallar alguna interacción verosímil era del 4%, se puede considerar que el estudio realizado ha sido satisfactorio. No obstante, este resultado debe tomarse con cautela porque sería necesaria una investigación más exhaustiva para tener mayor seguridad.

Puede encontrarse una exposición más formal de la metodología y resultados anteriores en [3].

## Bibliografía

- [1] Cai, T. T. y Liu, W. (2016). *Large-scale multiple testing of correlations*, Journal of the American Statistical Association, **111**(513), pp. 229–240.
- [2] Castro-Prado, F. (2018). *Contrastes de independencia para datos genómicos de alta dimensión*, Trabajo de fin de máster, Universidade de Santiago de Compostela.
- [3] Castro-Prado, F., Costas, J., González-Manteiga, W. y Penas, D. R. (2020). *Searching for genetic interactions in complex disease by using distance correlation*. arXiv:2012.05285.
- [4] Castro-Prado, F. y González-Manteiga, W. (2020). *Nonparametric independence tests in metric spaces: What is known and what is not*. arXiv:2009.14150.
- [5] Fromer, M. *et al.* (2016). *Gene expression elucidates functional impact of polygenic risk for schizophrenia*, Nature Neuroscience, **19**(11), pp. 1442–1453.
- [6] Jakobsen, M. E. (2017). *Distance covariance in metric spaces: Non-parametric independence testing in metric spaces*, Trabajo de fin de máster, Københavns Universitet. arXiv:1706.03490.
- [7] Kam-Thong, T. *et al.* (2011). *EPIBLASTER—fast exhaustive two-locus epistasis detection strategy using graphical processing units*, European Journal of Human Genetics, **19**, pp. 465–471.
- [8] Lyons, R. (2013). *Distance covariance in metric spaces*, Annals of Probability, **41**(5), pp. 3284–3305.

- [9] Székely, G. J. y Rizzo, M. L. (2017). *The energy of data*, Annual Review of Statistics and Its Application, **4**, pp. 447–479.

## Módulos planos

Área de Álgebra

Nerea González Barral

Universidade de Santiago de Compostela

11 de noviembre de 2020

### La categoría de módulos

Nuestro objetivo es dar una pequeña introducción al álgebra homológica, centrándonos en el estudio de los módulos.

En esta primera sección vamos a ver nociones básicas de álgebra categórica que serán fundamentales en lo que sigue. Para ello, seguiremos esencialmente [2].

**Definición 1.** Una *categoría*  $\mathcal{C}$  está formada por una clase de objetos  $\text{Obj}_{\mathcal{C}}$  y conjuntos de morfismos disjuntos dos a dos,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  para cada par de objetos  $A, B \in \text{Obj}_{\mathcal{C}}$ , con una composición  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ , denotada  $(f, g) \mapsto g \cdot f$  y satisfaciendo:

(i) Para cada objeto  $A$ , existe un morfismo identidad  $1_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$  tal que  $f \cdot 1_A = f$ , para cada  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  y  $1_A \cdot g = g$ , para cada  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ ;

(ii) Se tiene la asociatividad de la composición cuando sea posible, es decir, si  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ,  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$  y  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ , entonces  $h(gf) = (hg)f$ .

**Ejemplo 1.** Dado un anillo  $R$ , podemos considerar la categoría  ${}_R\mathfrak{M}$  de  $R$ -módulos por la izquierda, donde los objetos son  $R$ -módulos por la izquierda y los morfismos son homomorfismos de  $R$ -módulos, con la composición usual. Se tiene una categoría análoga para  $R$ -módulos por la derecha,  $\mathfrak{M}_R$ .

Esta será la categoría que nos interesará estudiar.

**Ejemplo 2.** Consideremos un conjunto  $X$  cuasiordenado, es decir, con una relación binaria reflexiva y transitiva  $\leq$ . Podemos interpretar  $X$  como una categoría  $\mathcal{C}$  si definimos  $\text{Obj}_{\mathcal{C}} = X$  y, dados  $x, y \in X$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  como el conjunto formado por un único elemento,  $i_y^x$ , si  $x \leq y$ , o el vacío en otro caso. La composición la definimos como  $i_z^y i_y^x = i_z^x$  cuando  $x \leq y \leq z$ .

Un conjunto cuasiordenado  $I$  es *dirigido* si para cada  $i, j \in I$ , existe  $k \in I$  tal que  $i \leq k$  y  $j \leq k$ .

Este ejemplo de categoría será importante, pues nos permitirá introducir los límites directos e inversos de forma sencilla. Nos interesarán especialmente los conjuntos cuasiordenados dirigidos.

---

PALABRAS CLAVE: módulos planos; álgebra homológica; módulos inyectivos; módulos proyectivos; categorías.

**Definición 2.** Sean  $\mathfrak{C}$  y  $\mathfrak{D}$  categorías. Un **funtor** covariante (contravariante)  $F: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$  consiste en una aplicación  $\text{Obj}_{\mathfrak{C}} \rightarrow \text{Obj}_{\mathfrak{D}}$  y una aplicación  $\text{Hom}(\mathfrak{C}) \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{D})$  que satisface:

- (i)  $F$  lleva un objeto  $A$  de  $\mathfrak{C}$  en un objeto  $FA$  de  $\mathfrak{D}$  y lleva un morfismo  $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$  en un morfismo  $Ff \in \text{Hom}_{\mathfrak{D}}(FA, FB)$  ( $Ff \in \text{Hom}_{\mathfrak{D}}(FB, FA)$ );
- (ii)  $F1_A = 1_{FA}$  para todo  $A \in \text{Obj}_{\mathfrak{C}}$ ;
- (iii)  $F(f \circ g) = (Ff) \circ (Fg)$  ( $F(f \circ g) = (Fg) \circ (Ff)$ ).

El concepto de funtor contravariante es dual al de funtor covariante, pues se obtiene del primero simplemente invirtiendo el sentido de las flechas. Omitiremos así definiciones y resultados para funtores contravariantes que se deduzcan de esta dualidad.

**Ejemplo 3.** Definimos el funtor **Hom covariante** asociado a un objeto  $A \in \text{Obj}_{\mathfrak{C}}$  como sigue,  $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, -): \mathfrak{C} \rightarrow \text{Set}$ , siendo  $\text{Set}$  la categoría cuyos objetos son los conjuntos y cuyos morfismos son las aplicaciones. Definimos  $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, -)C$  como  $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, C)$  y si  $f: C \rightarrow C'$  es un morfismo de  $\mathfrak{C}$ , definimos  $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, -)f$  como la aplicación de  $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, C)$  a  $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, C')$  que lleva  $g$  a  $fg$ .

Si  $\mathfrak{C} = {}_R\mathfrak{M}$ , entonces el funtor  $\text{Hom}$  toma valores en la categoría  $\text{Ab} := \mathbb{Z}\mathfrak{M}$ .

Se tiene de forma dual un funtor **Hom contravariante** asociado a un objeto  $B \in \text{Obj}_{\mathfrak{C}}$ , donde en este caso fijamos el objeto de llegada, es decir,  $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(-, B)C = \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(C, B)$  y si  $f: C \rightarrow C'$  es un morfismo de  $\mathfrak{C}$ ,  $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(-, B)f$  no es más que componer con  $f$  “por el otro lado”.

Si  $\mathfrak{C} = {}_R\mathfrak{M}$ , entonces  $F = \text{Hom}_R(-, B)$  toma valores en  $\text{Ab}$ . También se tiene para  $\mathfrak{C} = \mathfrak{M}_R$ .

Este ejemplo de funtor será muy importante, pues nos permitirá extraer propiedades de los módulos. Una forma de obtener estas propiedades es ver si los funtores conservan o no las sucesiones exactas, lo que nos lleva a la siguiente definición.

**Definición 3.** Un funtor covariante (contravariante)  $F$  se dice **exacto por la izquierda** si la exactitud de

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \quad (0 \longleftarrow A \xleftarrow{\alpha} B \xleftarrow{\beta} C)$$

implica la exactitud de

$$0 \longrightarrow FA \xrightarrow{F\alpha} FB \xrightarrow{F\beta} FC.$$

$F$  se dice **exacto por la derecha** si la exactitud de

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0 \quad (A \xleftarrow{\alpha} B \xleftarrow{\beta} C \longleftarrow 0)$$

implica la exactitud de

$$FA \xrightarrow{F\alpha} FB \xrightarrow{F\beta} FC \longrightarrow 0.$$

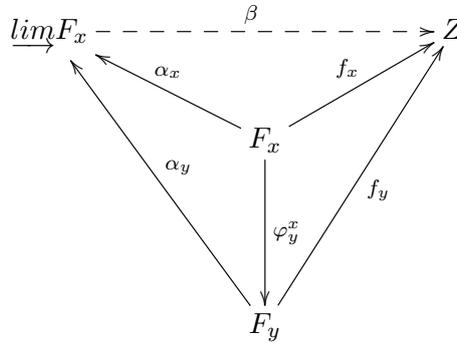
Un funtor es **exacto** si es exacto por la derecha y exacto por la izquierda.

**Teorema 1.** Para todo módulo  $M$ ,  $\text{Hom}(M, -)$  es un funtor exacto por la izquierda y  $\text{Hom}(-, M)$  es un funtor contravariante exacto por la izquierda.

Por último, veremos los sistemas directos y su dualización, los sistemas inversos.

**Definición 4.** Sea  $X$  un conjunto cuasiordenado y  $\mathcal{C}$  una categoría. Llamamos **sistema directo en  $\mathcal{C}$  con conjunto de índices  $X$**  a un funtor covariante  $F: X \rightarrow \mathcal{C}$ . Denotamos  $F_x = Fx$  y  $\varphi_y^x = Fi_y^x$  para todo  $x, y \in X$ , y escribimos  $F = \{F_x, \varphi_y^x\}$ .

**Definición 5.** Sea  $\{F_x, \varphi_y^x\}$  un sistema directo en  $\mathcal{C}$ . El **límite directo** sobre este sistema, que denotamos  $\varinjlim F_x$ , consiste en un objeto y una familia de morfismos  $\alpha_x: F_x \rightarrow \varinjlim F_x$ , con  $\alpha_x = \alpha_y \varphi_y^x$  cuando  $x \leq y$ , satisfaciendo la siguiente propiedad universal:



para cada objeto  $Z$  y cada familia de morfismos  $\{f_x: F_x \rightarrow Z\}$  con  $f_x = f_y \varphi_y^x$  para  $x \leq y$ , existe un único homomorfismo  $\beta: \varinjlim F_x \rightarrow Z$  que hace que el diagrama conmute.

**Proposición 1.** Si existe el límite directo de un sistema directo, entonces es único.

**Proposición 2.** El límite directo de un sistema directo de módulos  $\{F_x, \varphi_y^x\}$  existe.

Como mencionamos antes, podemos dualizar el concepto de sistema directo; basta sustituir funtor covariante por funtor contravariante en la definición. Esto es lo que se conoce como **sistema inverso**.

Obtendremos también la definición de **límite inverso** dualizando la de límite directo, es decir, dándole la vuelta a las flechas. Es inmediato entonces que si existe límite inverso, este tiene que ser único. Además, el límite inverso de un sistema inverso de módulos siempre existe.

## Módulos libres, proyectivos e inyectivos

En esta sección introduciremos los módulos libres, proyectivos e inyectivos, así como sus principales caracterizaciones. A partir de ahora,  $R$  denotará un anillo.

**Definición 6.** Un  $R$ -módulo  $A$  se dice **libre** si tiene una base, esto es, una familia de generadores linealmente independientes.

**Proposición 3.** Consideremos el diagrama de homomorfismos de  $R$ -módulos

$$\begin{array}{ccccc} & & F & & \\ & \swarrow \gamma & \downarrow \alpha & & \\ B & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

donde la sucesión inferior es exacta. Si  $F$  es libre y  $\alpha: F \rightarrow C$  es un homomorfismo, entonces existe  $\gamma: F \rightarrow C$  de forma que  $\alpha = \beta\gamma$ .

Esta propiedad motiva la siguiente definición.

**Definición 7.** Decimos que  $P$  es un  $R$ -módulo **proyectivo** si, dado un diagrama de homomorfismos de  $R$ -módulos con fila inferior exacta existe  $\gamma: P \rightarrow B$  haciendo el diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow \gamma & \downarrow \alpha & & \\ B & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

**Proposición 4.** Todo  $R$ -módulo libre es proyectivo.

**Teorema 2.** Un  $R$ -módulo  $P$  es proyectivo si y solo si  $\text{Hom}(P, -)$  es exacto.

**Teorema 3.** Un  $R$ -módulo  $P$  es proyectivo si y solo si es un sumando directo de un  $R$ -módulo libre. Además, todo sumando directo de un  $R$ -módulo proyectivo es proyectivo.

**Teorema 4** (Teorema de la base proyectiva). Un  $R$ -módulo  $A$  es proyectivo si y solo si existen elementos  $\{a_k \mid k \in K\} \subset A$  y homomorfismos  $\{\varphi_k: A \rightarrow R \mid k \in K\}$  tales que

(i) si  $x \in A$ , entonces  $\varphi_k x = 0$  para casi todo  $k \in K$ ;

(ii) si  $x \in A$ , entonces  $x = \sum_{k \in K} \varphi_k(x) a_k$ .

Además,  $A$  está generado por  $\{a_k \mid k \in K\}$ .

Podemos dualizar la definición de  $R$ -módulo proyectivo, obteniendo así los  $R$ -módulos inyectivos.

**Definición 8.** Un  $R$ -módulo  $E$  es **inyectivo** si para cada módulo  $B$  y cada submódulo  $A$  de  $B$ , cada homomorfismo  $f: A \rightarrow E$  puede extenderse a un homomorfismo  $g: B \rightarrow E$ . Se tiene entonces el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & & \uparrow f & \nearrow g & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B. \end{array}$$

**Teorema 5.** Un  $R$ -módulo  $E$  es inyectivo si y solo si  $\text{Hom}(-, E)$  es exacto.

**Teorema 6.** *Un  $R$ -módulo  $E$  es inyectivo si y solo si cada sucesión exacta corta*

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{i} B \rightarrow C \rightarrow 0$$

*escinde. En particular,  $E$  es un sumando directo de  $B$ .*

**Teorema 7** (Criterio de Baer). *Sea  $E$  un  $R$ -módulo. Son equivalentes:*

- (i)  *$E$  es inyectivo.*
- (ii) *Para cada ideal por la izquierda  $I$  de  $R$  y cada homomorfismo de  $R$ -módulos  $\gamma: I \rightarrow E$  existe un homomorfismo de  $R$ -módulos  $f: R \rightarrow E$  que extiende a  $\gamma$ .*

## Módulos planos

En esta tercera y última sección introduciremos los módulos planos. Para ello necesitaremos definir el producto tensorial de módulos. Veremos también cómo se relacionan los módulos planos con los estudiados en la sección anterior.

**Definición 9.** *Sea  $A$  un  $R$ -módulo por la derecha,  $B$  un  $R$ -módulo por la izquierda y  $G$  un grupo abeliano con la suma. Una función  $f: A \times B \rightarrow G$  se dice  **$R$ -biaditiva** si para todo  $a, a' \in A$ ,  $b, b' \in B$  y  $r \in R$ :*

- (i)  $f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b)$ ;
- (ii)  $f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b')$ ;
- (iii)  $f(ar, b) = f(a, rb)$ .

**Definición 10.** *Sea  $A$  un  $R$ -módulo por la derecha y  $B$  un  $R$ -módulo por la izquierda. Definimos el **producto tensorial**  $A \otimes_R B$  como el grupo abeliano y la función  $R$ -biaditiva  $f'$  que resuelve el siguiente problema universal:*

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{h} & A \otimes_R B \\ & \searrow f & \swarrow f' \\ & G & \end{array}$$

**Proposición 5.** *El producto tensorial de un  $R$ -módulo por la derecha  $A$  y un  $R$ -módulo por la izquierda  $B$  existe y es único salvo isomorfismo.*

**Proposición 6.** *Sea  $f: A \rightarrow A'$  un homomorfismo de  $R$ -módulos por la derecha y sea  $g: B \rightarrow B'$  un homomorfismo de  $R$ -módulos por la izquierda. Existe un único homomorfismo  $A \otimes_R B \rightarrow A' \otimes_R B'$  con  $a \otimes b \mapsto f(a) \otimes g(b)$ .*

La aplicación definida en el teorema anterior se denota  $f \otimes g$ . Conserva la composición y la suma, por lo que tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 8.** *Si  $A$  es un  $R$ -módulo por la derecha, entonces  $A \otimes_R -$  es un funtor aditivo, es decir, conserva sumas.*

**Proposición 7.** *Si  $B$  es un  $R$ -módulo por la izquierda, entonces existe un isomorfismo  $R \otimes_R B \cong B$  con  $r \otimes b \mapsto rb$ .*

Hemos visto que tensorizar es un funtor. Podemos entonces estudiar su exactitud.

**Teorema 9.** *Los funtores  $M \otimes_R -$  y  $- \otimes_R N$  son funtores exactos por la derecha.*

**Definición 11.** *Un  $R$ -módulo por la derecha  $B$  es un **módulo plano** si el funtor  $B \otimes_R -$  es exacto.*

Veamos ahora cómo se relacionan estos con los módulos de la sección anterior.

**Teorema 10.** *Todo  $R$ -módulo proyectivo es plano.*

El resultado anterior se deduce empleando el Teorema 17, que  $R$  es plano como  $R$ -módulo y que una suma directa de  $R$ -módulos es un  $R$ -módulo plano si y solo si cada sumando directo es plano.

Sabemos entonces que todo  $R$ -módulo libre es proyectivo y que todo  $R$ -módulo proyectivo es plano. Cabe preguntarse ahora si tenemos relaciones en el otro sentido. Por ejemplo, ¿cuándo un  $R$ -módulo plano es proyectivo? Para responder a esta pregunta introduciremos los  $R$ -módulos finitamente presentados.

**Definición 12.** *Un  $R$ -módulo por la derecha  $B$  es **finitamente presentado** si existe una sucesión exacta de la forma*

$$F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow B \rightarrow 0$$

donde  $F_1$  y  $F_0$  son libres y finitamente generados.

**Teorema 11.** *Todo  $R$ -módulo plano  $B$  finitamente presentado es proyectivo.*

**Proposición 8.** *Si  $\{B_i, \varphi_j^i\}$  es un sistema directo de  $R$ -módulos planos sobre un conjunto dirigido  $I$ , entonces  $\varinjlim B_i$  es plano.*

Por último, veremos una relación entre los  $R$ -módulos planos y los  $R$ -módulos libres. Esta relación nos la da el llamado Teorema de Lazard o Teorema de Govorov-Lazard.

**Teorema 12** (Teorema de Lazard). *Para un  $R$ -módulo  $B$ , son equivalentes:*

- (i)  $B$  es plano.
- (ii) Existe un conjunto dirigido  $I$  y un sistema directo de  $R$ -módulos libres finitamente generados  $\{L_i\}$  sobre  $I$  tal que  $B \cong \varinjlim L_i$ .

Una de las dos implicaciones es inmediata, pues todo  $R$ -módulo libre es plano y el límite directo de un sistema directo de  $R$ -módulos planos sobre un conjunto de índices dirigido es plano. La demostración de la otra implicación es algo más compleja y puede encontrarse, por ejemplo, en [1, Capítulo 10].

## Bibliografía

- [1] Bourbaki, N. (1980). *Algèbre*, Masson, Berlin.
- [2] Rotman, J. J. (1979). *An introduction to homological algebra*, Academic Press, New York.

## Detección del caos en sistemas dinámicos

Área de Matemática Aplicada

Javier Iglesias Pérez

Universidade de Santiago de Compostela

25 de noviembre de 2020

### Introducción

Una de las principales características de los sistemas caóticos es la sensibilidad de la solución respecto a las condiciones iniciales, esto es, las trayectorias correspondientes a dos puntos muy próximos pueden resultar muy diferentes. Los exponentes característicos de Lyapunov se pueden emplear como una herramienta para cuantificar dicha sensibilidad, es decir, de alguna forma son “medidores del caos”.

A continuación, veremos cómo se definen para sistemas de ecuaciones diferenciales y posteriormente describiremos un algoritmo para calcularlos.

### Exponentes característicos de Lyapunov de primer orden

Comenzaremos con un teorema clásico de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, que guarda gran relación con los exponentes de Lyapunov.

**Teorema 1** (Dependencia de la solución respecto a las condiciones iniciales). *Sean  $E \subset \mathbb{R}$  abierto,  $x_0 \in E$  y  $f \in C^1(E)$ . Entonces, existen  $a > 0$  y  $\delta > 0$  tales que, para todo  $y \in B(x_0, \delta)$ , el problema de valor inicial*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x), \\ x(0) &= y,\end{aligned}$$

*tiene solución única  $u(t, y)$ ,  $u \in C^1(G)$ ,  $G = [-a, a] \times B(x_0, \delta)$ . Para cada  $y \in B(x_0, \delta)$ ,  $u(t, y)$  es de clase  $C^2$  respecto a  $t$  en  $[-a, a]$ . Además, para  $t \in [-a, a]$  e  $y \in B(x_0, \delta)$  se verifica:*

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t, y) = \Phi(t, y), \tag{1}$$

*donde  $\Phi$  es una solución fundamental de*

$$\begin{aligned}\dot{\Phi} &= Df[u(t, y)]\Phi, \\ \Phi(0, y) &= \text{Id}.\end{aligned} \tag{2}$$

---

PALABRAS CLAVE: sistemas dinámicos; teoría del caos; exponentes característicos de Lyapunov; Bennetin; Lorenz.

Este resultado nos proporciona una forma de determinar la variación de la solución respecto a pequeñas perturbaciones de las condiciones iniciales. Veamos ahora cómo se definen los exponentes de Lyapunov.

**Definición 1.** Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $f \in \mathcal{C}^1(E)$  y  $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Definimos el **exponente característico de Lyapunov (LCE) de primer orden** de  $\mathbf{v}_0$  asociado a la ecuación diferencial no lineal  $\dot{x} = f(x)$  como

$$\begin{aligned} \lambda: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ \mathbf{v}_0 &\longmapsto \lambda(\mathbf{v}_0) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t} \ln \|\mathbf{v}(t)\| \right), \quad \mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} &\longmapsto \lambda(\mathbf{0}) = -\infty, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{v}(t) = \Phi(t)\mathbf{v}_0$ , siendo  $\Phi(t)$  la solución de

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= D_x f(x(t))\Phi(t), \\ \Phi(0) &= \text{Id}. \end{aligned} \tag{3}$$

**Observación 1.** Teniendo en cuenta (2) y la Definición 1, podemos interpretar el LCE asociado a  $\mathbf{v}_0$  como una medida de la sensibilidad de la solución respecto a perturbaciones en la condición inicial en la dirección de  $\mathbf{v}_0$ .

A continuación, describimos algunas propiedades de los LCEs.

**Teorema 2** ([1]). Sean  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , los LCEs satisfacen:

1.  $\lambda(\alpha\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{v})$ , para todo  $\alpha \neq 0$ .
2.  $\lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \leq \max\{\lambda(\mathbf{v}), \lambda(\mathbf{w})\}$ .
3. Si  $\lambda(\mathbf{v}) \neq \lambda(\mathbf{w})$ , entonces  $\lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \max\{\lambda(\mathbf{v}), \lambda(\mathbf{w})\}$ .
4. Sea  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Si  $\lambda(\mathbf{v}_i) \neq \lambda(\mathbf{v}_j)$  para todo  $i \neq j$ , entonces  $B$  es un conjunto linealmente independiente.
5.  $\lambda$  alcanza, a lo sumo,  $n$  valores finitos.

Estas propiedades nos permiten afirmar que la familia de espacios vectoriales

$$\mathcal{V}_\lambda = \{V_0, V_1, \dots, V_r\},$$

donde

$$\begin{aligned} V_0 &= \{\mathbf{0}\} \\ V_i &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \lambda(\mathbf{v}) \leq \lambda_i\}, \quad 1 \leq i \leq r \leq n, \end{aligned}$$

cumple

$$\{\mathbf{0}\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_r = \mathbb{R}^n,$$

pues  $\lambda(\mathbf{v}) = \lambda_i \Leftrightarrow \mathbf{v} \in V_i \setminus V_{i-1}$ . Por tanto,  $\mathcal{V}_\lambda$  es una filtración<sup>1</sup>.

A continuación presentamos el algoritmo propuesto en [3] para el cálculo de los exponentes. En primer lugar, fijemos  $s > 0$ , el tamaño del intervalo de integración en cada paso; *maxit*, el número máximo de pasos que haremos; *tol*, la tolerancia del test de convergencia de la serie numérica que define el LCE; y  $\mathbf{v}_0$ , la dirección (unitaria) para la cual queremos calcular el exponente. El algoritmo es el que sigue:

1.  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{v}_0$ .

2. Para  $k = 1, \dots, \text{maxit}$ :

2.1 Calculamos  $\mathbf{v}_k = Df_x \mathbf{v}(s)$  resolviendo el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= F(y(t)), \\ y(0) &= \eta, \end{aligned} \tag{4}$$

donde  $y(t) = (x(t), \mathbf{v}(t))^T$ ,  $F = (f(x(t)), Df_{x(t)} \mathbf{v}(t))^T$  y  $\eta = (x_{(k-1)s}, \mathbf{w}_{k-1})^T$ .

2.2 Calculamos  $\alpha_k = \|\mathbf{v}_k\|$  y normalizamos  $\mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k/\alpha_k$ .

2.3 Actualizamos el valor de la aproximación de  $\lambda(\mathbf{v})$  :

$$\lambda_k = [(k-1)\lambda_{k-1} + \ln(\alpha_k)/s]k.$$

2.4 Comprobamos si se cumple el test de parada  $\|\lambda_k - \lambda_{k-1}\| < \text{tol}$ . En caso afirmativo, detenemos el algoritmo; en otro caso, pasamos a la siguiente iteración, actualizando  $k \rightarrow k+1$  y regresando al paso 2.1.

**Observación 2.** *El cálculo de  $\lambda(\mathbf{v})$  requiere conocer el valor de la norma de la evolución del vector  $\mathbf{v}$  tras un tiempo  $s$ . Sin embargo, para resolver el sistema definido por  $Df_x$ , (3), necesitamos acoplarlo a  $f$ , ya que al ser  $f$  no lineal, el valor  $Df_x$  varía a lo largo del tiempo.*

**Observación 3.** *Aunque a priori el algoritmo se ha diseñado para el cálculo de  $\lambda(\mathbf{v})$ , proporcionará el exponente  $\lambda_r = \max\{\lambda(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}$ . Esto se debe a que si queremos obtener el exponente  $\lambda_i$ , debemos tomar  $\mathbf{v} \in E_i \setminus E_{i-1}$  y calcular su evolución. Sin embargo, cualquier desviación de la órbita de  $\mathbf{v}$  nos llevará a la órbita de otro vector  $\mathbf{w}$  que estará, casi con absoluta certeza, en  $E_r \setminus E_{r-1}$ . Esta desviación se va a dar siempre, debido a la necesidad de usar métodos numéricos para integrar el sistema (4).*

Para que un sistema tenga un comportamiento caótico basta con que uno de los LCEs sea positivo, por lo que este algoritmo nos sirve para detectar el caos. Sin embargo, si queremos obtener todos los valores que toma  $\lambda$  debemos modificarlo. Para ello, introduciremos los exponentes característicos de orden  $p$ .

<sup>1</sup>Una filtración de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{F} = \{F_i, 1 \leq i \leq r\}$ ,  $r \leq n$ , es una familia de subespacios vectoriales que cumple  $\{\mathbf{0}\} = F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_{i-1} \subsetneq F_i \subsetneq \dots \subsetneq F_r = \mathbb{R}^n$ .

## Exponentes característicos de Lyapunov de orden $p$

Los exponentes de Lyapunov permiten cuantificar la tasa media a la que las trayectorias de un punto y una perturbación de este convergen o divergen localmente. Los exponentes característicos de orden  $p$  generalizan este concepto a subespacios de orden  $p$ , en el sentido de que nos permiten medir la variación del volumen  $p$ -dimensional de un paralelepípedo frente a una perturbación.

**Observación 4.** Se define  $\text{Vol}^p(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) = \|\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p\|_{\wedge^k(\mathbb{R}^n)}$ , donde  $(\wedge^k(\mathbb{R}^n), \wedge)$  denota la  $k$ -ésima potencia exterior de  $\mathbb{R}^n$ ,

**Definición 2.** Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $f \in \mathcal{C}^1(E)$  y  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\} \subset \mathbb{R}^n$ . Definimos el **LCE de orden  $p$**  de  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$  asociado a la ecuación diferencial no lineal  $\dot{x} = f(x)$  como

$$\lambda^p(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t} \ln \text{Vol}^p(\mathbf{v}_1(t), \dots, \mathbf{v}_p(t)) \right),$$

donde  $\mathbf{v}_i(t) = \Phi(t)\mathbf{v}_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , siendo  $\Phi(t)$  la solución de

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= D_x f(x(t))\Phi(t), \\ \Phi(0) &= \text{Id}. \end{aligned}$$

**Observación 5.** En vista de la Observación 4 y de la Definición 2, la teoría descrita para los LCEs de orden 1 se extiende de manera natural a los de orden superior. En particular, tenemos que  $\lambda^p$  alcanza a lo sumo  $\binom{n}{k}$  valores finitos.

El siguiente resultado nos permitirá establecer un algoritmo para el cálculo de los todos los LCEs de orden 1 del sistema.

**Teorema 3** ([2]). Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $f \in \mathcal{C}^1(E)$ . Se cumple:

1. Para todo subconjunto de vectores  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\} \subset \mathbb{R}^n$  linealmente independiente,

$$\lambda^p(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}) = \sum_{i=1}^p \lambda_{i_k},$$

donde  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$ .

2. Si además  $e^p = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\} \subset \mathbb{R}^n$  satisface para  $2 \leq j \leq n$

$$\dim(e^p \cap V_j) = \max \left( 0, p - \sum_{i=1}^{j-1} k_i \right),$$

entonces

$$\lambda^p(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) = \sum_{i=1}^p \lambda_i.$$

Estamos ya en condiciones de presentar el algoritmo para el cálculo de todos los LCEs de orden 1 ([3]). De nuevo, fijemos  $s > 0$ ,  $maxit$ ,  $tol$  y  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  un conjunto ortonormal.

1. Definimos  $\mathbf{w}_0^j = \mathbf{v}_j$ , para  $j = 1, \dots, p$ .
2. Para  $k = 1, \dots, maxit$ :
  - 2.1 Calculamos  $\mathbf{v}_k^j = Df_x \mathbf{v}(s)$ ,  $j = 1, \dots, p$ , resolviendo el problema de valor inicial
 
$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= F(y(t)), \\ y(0) &= \eta, \end{aligned}$$
 donde  $y(t) = (x(t), \mathbf{v}(t))^T$ ,  $F = (f(x(t)), Df_{x(t)} \mathbf{v}(t))^T$  y  $\eta = (x_{(k-1)s}, \mathbf{w}_{k-1}^j)^T$ .
  - 2.2 Ortogonalizamos  $\{\mathbf{v}_k^1, \dots, \mathbf{v}_k^p\}$  mediante el proceso de Gram-Schmidt modificado.
  - 2.3 Actualizamos el valor de la aproximación de  $\lambda_k^i$ :
 
$$\lambda_k^i = [(k-1)\lambda_{k-1}^i + \ln(\alpha_k^i)/s]k, \quad i = 1, \dots, p.$$
  - 2.4 Comprobamos si se cumple el test de parada  $\|\lambda_k^i - \lambda_{k-1}^i\| < tol$ , para todo  $i = 1, \dots, p$ . En caso afirmativo, detenemos el algoritmo; en otro caso, pasamos a la siguiente iteración, actualizando  $k \rightarrow k+1$  y regresando al paso 2.1.

## Aplicación a un sistema hipercaótico

En [4] se propone un modelo en dimensión 4 construido a partir del modelo de Lorenz. Este modelo presenta un comportamiento hipercaótico que, a diferencia de un sistema caótico, tiene más de un LCE positivo. Las ecuaciones que lo rigen son las siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) + w, \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y, \\ \dot{z} &= xy - \beta z, \\ \dot{w} &= -yz + dw, \end{aligned}$$

donde  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $\beta$  y  $d$  son parámetros del sistema. En este caso, se han fijado  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  y  $\beta = 8/3$ , y se considera  $d$  un parámetro de control. En particular, para  $d = -1$ , los resultados obtenidos son

$$\lambda_1 = 0,3602, \quad \lambda_2 = 0,1574, \quad \lambda_3 = -4,4645 \cdot 10^{-4} \quad \text{y} \quad \lambda_4 = -15,1839,$$

que son razonablemente similares a los indicados en [4]:

$$\lambda_1 = 0,3381, \quad \lambda_2 = 0,1586, \quad \lambda_3 = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_4 = -15,1752.$$

Por otro lado, si únicamente nos fijamos en los signos de los exponentes podemos conocer la dinámica del sistema y distinguir si es hipercaótico (2 exponentes positivos), caótico (un único exponente positivo) o si no presenta caos. De esta forma, calculando el espectro de exponentes para  $-6.43 \leq d \leq 0.17$  podemos ver cómo afecta dicho parámetro a la dinámica del sistema (Figuras 1 y 2).

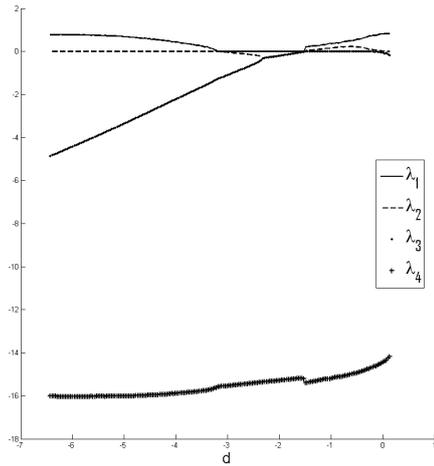


Figura 1: Espectro de Lyapunov para  $-6.43 \leq d \leq 0.17$ .

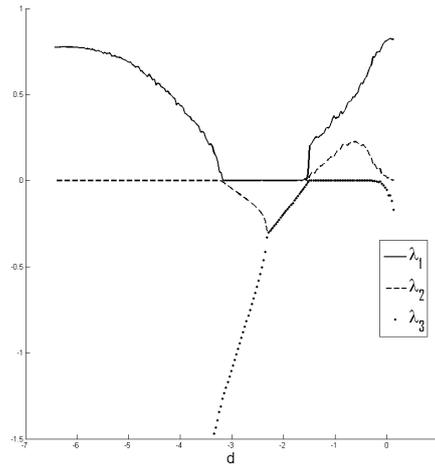


Figura 2: Detalle de la Figura 1.

Para  $d \in [-6.43, -3.21]$  uno de los exponentes es positivo, por lo que tendremos un comportamiento caótico. Si  $d \in [-3.21, -1.52]$ , entonces  $\lambda_1 = 0$ , y por tanto no hay caos. Para valores superiores, los dos primeros son positivos y es entonces cuando el sistema presenta hipercaos.

## Bibliografía

- [1] Barreira, L. (2017) *Lyapunov Exponents*, Birkhäuser, Basel.
- [2] Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A. y Strelcyn, J. M. (1980). *Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory*, *Meccanica*, **15**(1), pp. 9–20.
- [3] Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A. y Strelcyn, J. M. (1980). *Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 2: Numerical application*, *Meccanica*, **15**(1), pp. 21–30.
- [4] Wang, X. y Wang, M. (2008). *A hyperchaos generated from Lorenz system*, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **387**(14), pp. 3751–3758.

## La constante de Kottman

Área de Análisis Matemático

Raúl Pino Velasco

Universidad de Extremadura

11 de diciembre de 2020

### Breve repaso de espacios de Banach

Recuérdese que una *norma* definida en un espacio vectorial  $X$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  (en nuestro caso,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) es una aplicación  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty)$  verificando

- (i)  $\|x\| > 0$  para todo  $x \in X$  no nulo;
- (ii)  $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$  para todo  $x \in X$  y  $\alpha \in \mathbb{K}$ ;
- (iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  para todo  $x, y \in X$ .

Un espacio vectorial  $X$  dotado de una norma  $\|\cdot\|$  se denomina *espacio vectorial normado*, y lo denotamos por  $(X, \|\cdot\|)$ . Empleando las propiedades de la norma se deduce que la aplicación  $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  dada por  $d(x, y) = \|x - y\|$  define una métrica en  $X$ . Un espacio vectorial normado  $(X, \|\cdot\|)$  se dice *espacio de Banach* si es completo respecto de la topología métrica que define la norma  $\|\cdot\|$ .

Por otra parte, dados cualesquiera espacios de Banach  $X$  e  $Y$ , se denomina *operador* a una aplicación  $T : X \rightarrow Y$  que sea lineal y continua. Un *isomorfismo* es un operador que tenga inverso, esto es, un *homeomorfismo lineal*.

Uno de los ejemplos básicos de espacio de Banach es el espacio euclidiano  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ , donde

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Otras variaciones son los espacios  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ , cuya norma viene dada, para cada  $1 \leq p < \infty$ , por

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Pese a ello, no le prestaremos demasiada atención a los espacios de Banach de dimensión finita ya que es bien conocido (véase la Proposición 1) que todos ellos son isomorfos a  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ .

La generalización natural del espacio  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$  a dimensión infinita es el espacio  $\ell_p = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$  dotado de la norma

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty.$$

Para el caso  $p = \infty$  consideramos  $\ell_\infty = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K} : \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty\}$  dotado de la norma

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|.$$

Por último, otro ejemplo importante es el espacio  $c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K} : x_n \rightarrow 0\}$  dotado de la norma

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|.$$

## El Teorema de Riesz

La idea esencial que queremos transmitir es que las propiedades que posee un espacio de Banach  $X$  están profundamente relacionadas con las propiedades que tiene la *bola unidad* del propio espacio,  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ . La diferencia fundamental que había entre los espacios de Banach anteriores es que los primeros son de dimensión finita, mientras que los últimos no. Luego, ¿cuál es la propiedad de la bola unidad que permite estudiar la dimensión de un espacio de Banach? En virtud del Teorema de Riesz (ver [4]), tal propiedad es la *compacidad*.

**Teorema 1** (Teorema de Riesz). *Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach. Entonces,  $X$  tiene dimensión finita si y sólo si  $B_X$  es compacta en la topología que define  $\|\cdot\|$ .*

*Demostración.* Veamos que si  $X$  tiene dimensión finita entonces  $B_X$  es compacta. En efecto, ello se deduce del siguiente resultado clásico (ver [4]):

**Proposición 1.** *Todo espacio de Banach de dimensión finita es isomorfo a  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ .*

Esto implica que la topología de cualquier espacio de Banach de dimensión finita es la topología euclidiana. Así, para comprobar que  $B_X$  es compacta para dicha topología es suficiente –en virtud del Teorema de Heine-Borel– ver si es cerrada y acotada. Ahora bien,  $B_X$  es claramente acotada, y puesto que la aplicación norma es siempre continua para cualquier espacio de Banach (hecho que se deduce de las propiedades de la norma) y que  $B_X = (\|\cdot\|)^{-1}([0, 1])$ , concluimos que la bola unidad es cerrada. Luego,  $B_X$  es compacta.

Comprobemos ahora que  $X$  tiene dimensión finita si  $B_X$  es compacta; equivalentemente, si  $X$  es de dimensión infinita entonces la bola unidad no es compacta. La compacidad en espacios métricos completos (que es el caso particular en el que se encuentran los espacios de Banach) está caracterizada de la siguiente manera:

**Proposición 2.** *Dado un espacio métrico completo  $(M, d)$  y un subconjunto cerrado  $X \subset M$ , son equivalentes:*

- (1)  $X$  es compacto;
- (2)  $X$  es secuencialmente compacto; esto es, toda sucesión en  $X$  admite una subsucesión convergente;
- (3)  $X$  es totalmente acotado, esto es, para cada  $\varepsilon > 0$  existe un recubrimiento finito de  $X$  formado por bolas de diámetro a lo sumo  $\varepsilon$ .

De esta manera, basta comprobar que la bola unidad no es secuencialmente compacta si  $X$  es un espacio de Banach de dimensión infinita; es decir, que se puede construir una sucesión en  $B_X$  que no admite subsucesiones convergentes. Tal sucesión la obtenemos aplicando el siguiente resultado, que suele denominarse el *Lema de elementos casi ortogonales*:

**Lema 1.** *Sea  $X$  un espacio de Banach e  $Y \subset X$  un subespacio cerrado propio. Entonces, para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $x \in S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$  tal que  $d(x, Y) = \inf_{y \in Y} d(x, y) \geq 1 - \varepsilon$ .*

Geoméricamente, los vectores unitarios a distancia uno del subespacio  $Y$  pueden interpretarse como los vectores ortogonales a  $Y$ . El problema es que un espacio de Banach arbitrario no tiene garantizada la existencia de un producto escalar que permita hablar con propiedad de ortogonalidad. Sin embargo, pese a que no se puedan garantizar vectores ortogonales ( $d(x, Y) = 1$ ) sí que se pueden hallar vectores “casi ortogonales” ( $d(x, Y) = 1 - \varepsilon$ ).

Mediante este lema podemos construir una sucesión de vectores  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S_X$  tales que la distancia entre cualesquiera elementos de la sucesión sea mayor o igual que una constante estrictamente positiva  $\theta \in (0, 1)$ , esto es,  $\|x_n - x_m\| \geq \theta$  para todo  $n \neq m$ . Se dice en este caso que la sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es  $\theta$ -separada.

En efecto, sea  $\varepsilon = 1/2$  fijado y  $x_1 \in S_X$  unitario. Consideremos el espacio que genera  $x_1$ ,  $Y = \overline{\text{span}}\{x_1\}$ . Luego, en virtud del Lema 1 sabemos que existe  $x_2 \in S_X$  tal que  $d(x_2, Y) \geq 1/2$ . Luego,  $\|x_1 - x_2\| = d(x_1, x_2) \geq 1/2$ .

Ahora, si  $Y' = \overline{\text{span}}\{x_1, x_2\}$ , nuevamente en virtud del Lema 1 existe  $x_3 \in S_X$  tal que  $d(x_3, Y') \geq 1/2$ . Como la dimensión de  $X$  es infinita, podemos iterar el proceso y construir inductivamente una sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S_X$  tal que, para  $n > m$ ,  $\|x_n - x_m\| \geq d(x_n, \overline{\text{span}}\{x_1, \dots, x_m\}) \geq 1/2 > 0$ .

Notemos que esta sucesión  $1/2$ -separada que hemos construido no admite ninguna subsucesión convergente, precisamente porque todos los términos de la sucesión están distanciados un valor estrictamente positivo. Luego, hemos encontrado una sucesión en  $S_X \subset B_X$  que no admite subsucesiones convergentes, por lo que, en virtud de la Proposición 2,  $B_X$  no es compacta.  $\square$

## La constante de Kottman

La demostración que da el Teorema de Riesz garantiza que, dado cualquier espacio de Banach de dimensión infinita, se puede construir una sucesión  $\theta$ -separada en su esfera unidad para cualquier  $0 < \theta < 1$ . Ahora bien, es un cálculo inmediato que la

sucesión de vectores canónicos  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\ell_2$  forma una sucesión que es  $\sqrt{2}$ -separada en su esfera unidad. Luego, existen espacios de Banach que admiten sucesiones más separadas de lo que indica la demostración del Teorema de Riesz. Así, definimos la *constante de Kottman* de  $X$  como la mayor distancia que se puede tomar para construir una sucesión separada por tal distancia en  $S_X$ . Más precisamente:

**Definición 1.** *Dado un espacio de Banach  $X$ , se define la **constante de Kottman** de  $X$  como*

$$\begin{aligned} K(X) &= \sup\{\sigma : \text{existe } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S_X \text{ tal que } \|x_n - x_m\| \geq \sigma, n \neq m\} \\ &= \sup\{\sigma : \text{existe una sucesión } \sigma\text{-separada } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S_X\}. \end{aligned}$$

Es claro que  $0 \leq K(X) \leq 2$ , ya que el diámetro de la  $B_X$  es dos. La base usual de vectores canónicos  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  permite deducir que  $K(\ell_p) = 2^{1/p}$  si  $1 \leq p < \infty$ , mientras que  $K(\ell_\infty) = 2$ , hecho que puede verse al tomar la sucesión  $x_n = e_{n+1} - \sum_{j=1}^n e_j$ .

Históricamente, la constante fue introducida por Kottman en [5, 6], donde probó que  $K(X) > 1$  para cualquier espacio de Banach  $X$  de dimensión infinita. Años después, Elton y Odell [2] obtuvieron que  $K(X) > 1 + \varepsilon(X)$  para dichos espacios de Banach, donde  $\varepsilon(X) > 0$  es una constante que depende de  $X$ .

Un hecho relevante es que, aplicando un sencillo argumento de compacidad secuencial, el Teorema de Riesz puede reformularse en términos de la constante de Kottman: un espacio de Banach  $X$  es de dimensión finita si y sólo si  $K(X) = 0$ .

Además, si  $X$  es de dimensión infinita,  $K(X) > 1$  en virtud de los resultados mencionados anteriormente. Luego, en cierto sentido,  $K(X)$  puede verse como una medida de cuán secuencialmente compacta es la bola unidad de un espacio de Banach.

## Parámetros geométricos

La importancia de la constante de Kottman estriba en que está relacionada con muchos parámetros geométricos asociados a la bola unidad de un espacio de Banach. En particular, estos parámetros determinan propiedades geométricas de la propia bola que, a su vez, están íntimamente relacionadas con muchas propiedades importantes que posee el espacio total. Algunos ejemplos son los siguientes:

**Definición 2.** *Dado un espacio de Banach  $X$ , se define la **constante de empaquetamiento**,  $P(X)$ , como el supremo de radios  $r > 0$  tales que la bola unidad  $B_X$  contiene un número infinito de bolas no solapadas de radio al menos  $r$ .*

Los valores que toma  $P(X)$  determinan si el espacio  $X$  posee la propiedad geométrica de ser  *$P$ -convexo* (ver [7]). En realidad, estudiar  $P(X)$  es esencialmente lo mismo que estudiar  $K(X)$ , pues en [7] se probó que

$$P(X) = \frac{K(X)}{2 + K(X)}.$$

Luego, ser o no  $P$ -convexo está determinado por  $K(X)$ , lo que establece una primera relación entre la geometría de la bola unidad y la constante de Kottman.

Damos a continuación otros cuatro parámetros geométricos relacionados entre sí y con  $K(X)$ . El primero de ellos es una variación de la propia constante de Kottman:

**Definición 3.** *Dado un espacio de Banach  $X$ , se define la **constante de Kottman simétrica** como*

$$K^s(X) = \sup\{\sigma: \text{existe } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S_X \text{ tal que } \|x_n \pm x_m\| \geq \sigma, n \neq m\}.$$

Básicamente,  $K^s(X)$  es la constante de Kottman con la condición añadida de que los términos de la sucesión que se consideran estén distanciados también de los *puntos antipodales* de la propia sucesión. En particular, por definición se sigue que  $K^s(X) \leq K(X)$ .

El siguiente parámetro que consideramos es la *constante de Whitley* (también llamada *thickness constant*), que está dada por

$$T(X) = \inf\{\varepsilon > 0: \exists\{x_1, \dots, x_n\} \subset S_X \text{ tal que } B_X \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)\}. \quad (1)$$

Dicho valor es muy parecido a una medida de no compacidad de la bola unidad. Recuérdese que, dado un espacio métrico completo  $(M, d)$  y un subconjunto cerrado  $X \subset M$ , las *medidas de no compacidad* son aplicaciones que miden cuánto le falta a un subconjunto cerrado y acotado para ser compacto: si la medida de tal subconjunto es 0, éste es compacto; y si la medida es  $\varepsilon > 0$ , se dice que le falta un  $\varepsilon$  para ser compacto (o que es  $\varepsilon$ -compacto). Son, en definitiva, un refinamiento cuantitativo del carácter compacto. Para más detalles y definiciones formales puede consultarse [3].

Empleando el Teorema 2 se puede definir una medida de no compacidad sencilla denominada *medida de no compacidad de Hausdorff*, que viene dada por

$$\alpha(X) = \inf\{\varepsilon > 0: \exists\{x_1, \dots, x_n\} \subset X \text{ tal que } X \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)\}. \quad (2)$$

Luego, a partir de (1) y (2) se deduce que  $T(X)$  no es más que la medida de no compacidad de Hausdorff de la bola unidad con la salvedad de que los recubrimientos se restringen a puntos de la esfera unidad. Por lo tanto, se está midiendo cuán compacta es  $B_X$  respecto de su frontera, que es  $S_X$ .

Otros dos parámetros a considerar son las *constantes de Gao y James*:

**Definición 4.** *Dado un espacio de Banach  $(X, \|\cdot\|)$ , denotamos por  $M(x, y) = \max\{\|x - y\|, \|x + y\|\}$  y por  $m(x, y) = \min\{\|x - y\|, \|x + y\|\}$ . Definimos, respectivamente, las **constantes de Gao y James** como:*

$$(1) \quad g(X) = \inf_{x \in S_X} \inf_{y \in S_X} M(x, y);$$

$$(2) J(X) = \sup_{x \in S_X} \sup_{y \in S_X} m(x, y).$$

Geoméricamente,  $g(X)$  se interpreta como el menor radio de una bola que, centrada en algún  $x \in S_X$ , contiene un punto antipodal  $(y, -y)$ . Por su parte,  $J(X)$  es el ínfimo de todos los radios tales que, para cualquier  $x \in S_X$ , las bolas centradas en  $x$  y  $-x$  con ese radio recubren todo  $S_X$ .

Todos estos parámetros están relacionados entre sí mediante la siguiente cadena de desigualdades, cuya demostración puede consultarse en [1]:

**Teorema 2.** *Dado cualquier espacio de Banach de dimensión infinita se tiene que*

$$1 \leq g(X) \leq T(X) \leq K^s(X) \leq J(X) \leq 2.$$

Las anteriores desigualdades reflejan la profunda conexión que se establece entre todas las propiedades geométricas asociadas. Así, la constante de Kottman está, en cierto sentido, en el centro del estudio geométrico de la bola unidad, pues tanto ella como sus variaciones (por ejemplo  $K^s(X)$ ) se relacionan con prácticamente todos los parámetros geométricos que pueden asociarse a la bola unidad.

## Bibliografía

- [1] Castillo, J. M. F. y Papini, P.L. (2011). *On Kottman's constants in Banach spaces*, Banach Center Publications, **92**, pp. 75–84.
- [2] Elton, J. y Odell, E. (1981). *The unit ball of every infinite-dimensional normed linear space contains a  $(1 + \varepsilon)$ -separated sequence*, Colloquium Mathematicum, **44**, pp. 105–109.
- [3] Mursaleen, M., Rizvi, S. M. H. y Samet, B. (2017). *Measures of Noncompactness and Their Applications*, in *Advances in Nonlinear Analysis via the Concept of Measure of Noncompactness*, Banaś, J. et al. (eds.), Springer, Berlin.
- [4] Fabián, M., Habala, P., Hájek, P., Montesinos, V. y Zizler, V. (2010). *Banach Spaces Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, Springer, Berlin.
- [5] Kottman, C. A. (1970). *Packing and reflexivity in Banach spaces*, Transactions of American Mathematical Society, **150**, pp. 565–576.
- [6] Kottman, C. A. (1975). *Subsets of the unit ball that are separated by more than one*, Studia Mathematica, **53**, pp. 15–27.
- [7] Papini, P. L. (1983). *Some parameters of Banach spaces*, Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, **53**, pp. 131–148.

## Predecir la carga de un coche eléctrico no es tarea sencilla

Área de Matemática Aplicada

Nerea Martínez López

Universidade de Santiago de Compostela

3 de febrero de 2021

Dada la apremiante necesidad humana de reducir las emisiones contaminantes derivadas de nuestra actividad económica y social (con el formidable aumento de la inversión en energías renovables que esta transformación está generando) no es de extrañar que el sector dedicado al desarrollo del coche eléctrico continúe creciendo a pasos agigantados. Por ende, en la actualidad existe un potente talento investigador comprometido en alcanzar, combinando esfuerzos, la nueva generación de baterías de litio-ion, limpias, eficientes e inteligentes. Así, aun cuando las convenientes propiedades del litio resultan bien conocidas desde hace ya algún tiempo, a lo largo de las dos últimas décadas el metal más ligero de la tabla periódica ha ido cobrando un creciente interés en el sector tecnológico, posicionándose rápidamente como el material más atractivo para la fabricación de las baterías que proveen de energía a nuestros (cada día más numerosos) dispositivos portátiles y vehículos eléctricos.

### ¿Cómo es la batería de un coche eléctrico?

Una batería puede definirse, sencillamente, como un dispositivo capaz de almacenar y proporcionar energía eléctrica, por medio de las reacciones (mayormente de naturaleza química) que tienen lugar en su interior. Técnicamente, la unidad mínima capaz de producir energía eléctrica a través de mecanismos químicos recibe el nombre de *celda electroquímica* (véase la Figura 1), de forma que una *batería* se define realmente como un conjunto de tales celdas conectadas en serie o en paralelo.

Por motivos de diseño y seguridad, la unidad de alimentación de un coche eléctrico la conforman una considerable cantidad de pequeñas baterías de litio-ion, dispuestas en módulos (interconectados entre sí, formando una suerte de *pack*) constituidos por un número fijo de baterías. Este *pack de baterías* se encuentra ligado a un pequeño procesador de bajo coste denominado sistema de gestión de baterías (más conocido como *BMS*, por las siglas en inglés de *Battery Management System*), que monitoriza en todo momento la operación del *pack* y tiene la habilidad de tomar acciones de control y regulación sobre el mismo (véase la Figura 2). Así, el *BMS* se convierte en parte fundamental e inseparable de la batería que debe proporcionar energía al vehículo eléctrico, lo que explica el creciente interés en desarrollar técnicas y algoritmos adecuados para expandir sus funcionalidades y optimizar su eficiencia.

---

PALABRAS CLAVE: vehículos eléctricos (EV); sistemas de gestión de baterías (BMS); ingeniería de control; observabilidad estructural.

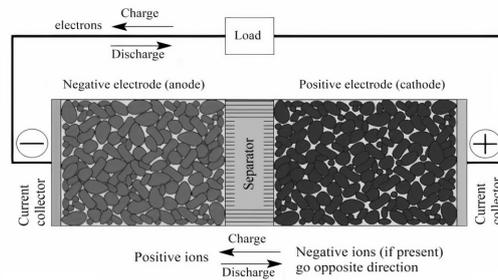


Figura 1: Celda electroquímica (galvánica): el dispositivo consiste de dos electrodos (positivo y negativo) cuya polaridad se invierte con cada ciclo de carga y descarga, y que se encuentran conectados por un medio conductor (el electrolito) que permite el paso de iones pero no de corriente, la cual fluye por el circuito externo [4].



Figura 2: Un *pack de baterías* de forma rectangular, mostrando visiblemente en su parte superior el *BMS* integrado que monitoriza el *pack* (izquierda) [6], y vehículo eléctrico al que se le ha extraído la unidad de alimentación, de la cual se puede apreciar su armazón externo (derecha) [5].

Una vez que se activa el contacto de un vehículo eléctrico y este inicia su marcha, el *BMS* es el encargado de ejecutar toda la maquinaria algorítmica y computacional que desempeña las tareas de monitorización, regulación y control sobre el *pack* de baterías, partiendo de labores sencillas (como la recuperación de datos imprescindibles acerca de la última operación del *pack* o la comprobación de su estado actual), pasando por procesos mecánicos activos (como el balanceo y la igualación de celdas, técnicas bien establecidas en ingeniería), hasta alcanzar tareas más complejas y ricas matemáticamente, como arrojar predicciones (que deben resultar sumamente precisas, por la seguridad de vehículo y conductor) acerca de los límites de energía y potencia aplicables en todo momento (véase la Figura 3). Así, la búsqueda de algoritmos válidos para estimar correctamente los indicadores del estado de la batería (con la rapidez necesaria), cuando esta se ve sujeta a las severas condiciones de operación que exige un vehículo eléctrico, todavía se presenta como un reto.

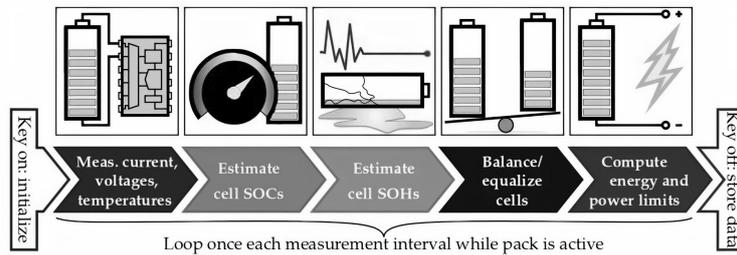


Figura 3: Un esquema de las tareas que debe desempeñar un *BMS* cada vez que inicia su bucle de funcionamiento [4].

### ¿Cómo estima el BMS la carga de un coche eléctrico?

Las tareas de predicción básicas que cualquier *BMS* debe ejecutar se tornarían triviales si existiesen sensores capaces de medir valores tales como la carga disponible en una batería de litio-ion, así como se mide la temperatura a la que esta opera o el voltaje que circula por la misma. Intuitivamente, el *estado de carga* (denominado más comúnmente *SOC*, por las siglas en inglés del término *State of Charge*) sería algo así como el medidor de gasolina integrado en un coche de combustión tradicional; un indicador que devuelve un valor entre 0%, que corresponde al tanque vacío, y un 100% cuando este se encuentra lleno [4]. Sin embargo, el propio concepto matemático de carga se vuelve difuso y se ve supeditado al tipo de modelo empleado para simular la operación de la batería real. ¿Cómo logra entonces el *BMS* emitir predicciones precisas acerca de la carga disponible en el *pack* de baterías? En la Figura 4 se recogen las principales metodologías que puede integrar un *BMS*.

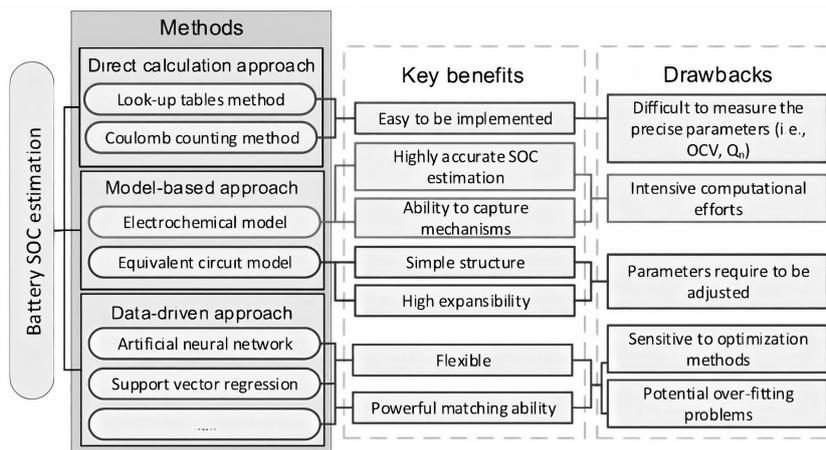


Figura 4: Esquema de los métodos clásicos de estimación del SOC candidatos a implementar en un *BMS*, con sus principales ventajas e inconvenientes [1].

Tradicionalmente, las tareas de estimación y predicción que un *BMS* comercial

podía llevar a cabo estaban fuertemente limitadas, principalmente porque estos dispositivos integraban, con suerte, algún modelo del tipo *circuito equivalente* (*ECM*, por el término anglosajón *Equivalent Circuit Model*), los cuales representan la batería como un circuito eléctrico constituido por diversos componentes (resistencias, condensadores, etc.) que permiten emular con bastante fidelidad los fenómenos observados en la batería real. Atendiendo a esta clase de modelos, el *SOC* puede calcularse como una expresión sencilla de la corriente que circula por la batería. Sin embargo, la naturaleza empírica de los *ECM* los capacita para producir estimaciones satisfactorias únicamente bajo condiciones de operación similares a las empleadas en la recopilación de los datos que generan el modelo. Es más, los modelos de carácter empírico no tienen la capacidad de explicar ni predecir las dinámicas internas de la batería [4], por lo que tampoco pueden dar respuesta a cuestiones que ya forman parte del *estado del arte* en la materia (predecir el estado de degradación que presenta un *pack* de baterías, por ejemplo).

En el polo opuesto a los *ECM* se encuentran los *modelos basados en física*, que recogen en profundidad los fenómenos electroquímicos predominantes a lo largo de la operación de la batería, incorporando, inevitablemente, diversas *Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs)* acopladas de forma compleja. Este tipo de modelos todavía resultan demasiado costosos computacionalmente como para que un *BMS* logre simularlos con la rapidez necesaria (los resultados deben estar disponibles para el *BMS* prácticamente en tiempo real). Así, la tendencia actual en el sector consiste en la obtención de modelos simplificados (típicamente, formulados en términos de *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, o EDOs*), partiendo del modelo electroquímico completo y tratando de retener la mayor parte de los fenómenos relevantes sin elevar demasiado la complejidad, para lo que se emplean *técnicas de reducción de orden*.

En este marco, el *SOC* adquiere un significado físico profundo, albergando una estrecha relación con la cantidad de material activo, el litio, que permanece disponible en todo momento para su extracción, desde el *electrodo negativo*, a través de las reacciones de oxidación–reducción inducidas por el paso de una corriente. Cuando el *BMS* integra un modelo basado en física, la tarea de estimar las cantidades de interés se convierte en un problema de ajuste entre el comportamiento real observado y la evolución del modelo implementado en el procesador (un esquema de este procedimiento se muestra en la Figura 5). Este modo de proceder permite predicciones precisas del *SOC*, así como de otras cantidades de interés (el estado de degradación que presenta el *pack* de baterías, el número de ciclos de carga y descarga que este todavía puede operar a pleno rendimiento, y un largo etcétera), alcanzando un compromiso óptimo entre significado físico y simplicidad.

No obstante, el planteamiento anterior cuenta con una seria limitación, que raramente se contempla en la extensa literatura dedicada a las labores de estimación en el marco del modelado multifísico. Así, cuando dos o más variables representativas de la operación de una batería (que pueden poseer un significado físico muy distinto) evolucionan de manera que los efectos perceptibles sobre la batería se presentan idénticos, tratar de extraer el comportamiento de dichas variables a través de algún tipo de algoritmo de filtrado puede resultar carente de sentido, e incluso conducir

a conclusiones gravemente erróneas. Para evitar este problema, es necesario que la *observabilidad e identificabilidad* del modelo planteado queden bien establecidas.

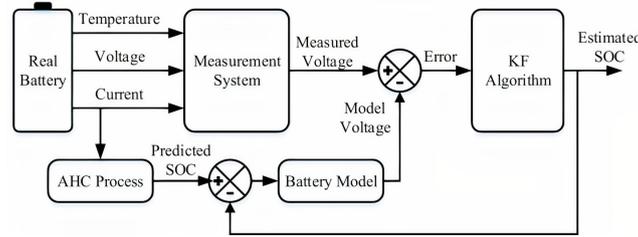


Figura 5: Esbozo del proceso de estimación del *SOC* basado en modelo, a través de un algoritmo conocido como filtro de Kalman (*KF* por *Kalman Filter*) [7].

## El papel de la observabilidad e identificabilidad en la predicción del SOC

De manera abstracta, una batería de litio-ion puede ser vista como un *sistema de control*; una asociación de procesos, relacionados entre sí, que evolucionan conjuntamente y cuyo comportamiento puede describirse en función de una serie de *variables de estado* (que cambian rápidamente con el sistema), *parámetros* (valores que permanecen constantes o varían muy lentamente) y *variables de entrada* (las cuales recogen las interacciones del sistema con su entorno). Como ya se ha dejado entrever, la *observabilidad e identificabilidad* son propiedades clásicas de la *teoría de control* que permiten asegurar, en cierto sentido, la ausencia de simetrías o ambigüedades en un *modelo de control*, las cuales pueden conducir a resultados equívocos en las labores de predicción del *SOC* y otras variables de interés.

Como ya se ha comentado, aunque los modelos físicos describiendo la operación de una batería de litio-ion adquieren, habitualmente, la forma de sistemas basados en *EDPs*, la tendencia actual consiste en aplicar algún método de reducción de orden para obtener un modelo simplificado conformado por *EDOs*. Así, se puede suponer que el modelo representando la batería se escribe, en el lenguaje de la teoría de control, como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), \theta, u(t)), & t \in I \subset [0, +\infty), \\ y(t) = h(x(t), \theta, u(t)), \end{cases}$$

donde  $x(t) \in X \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$  representa el vector de estados,  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^{n_\theta}$  recoge los parámetros del sistema, y  $u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^{n_u}$  es el vector de entradas (usualmente, la corriente que se hace circular por la batería), mientras que  $X, \Theta$  y  $U$  son abiertos euclídeos ( $n_x, n_\theta, n_u > 0$ ). La descripción dinámica  $f$  de un sistema de control suele ir acompañada de una serie de mediciones, teóricas y/o experimentales, expresadas como una función  $h$  de las variables características, de forma que  $y(t) \in Y \subset \mathbb{R}^m$  (siendo  $Y$  un abierto euclídeo) es un vector constituido por  $m \geq 1$  variables

denominadas *salidas*, que recogen observaciones del comportamiento ofrecido por el sistema (usualmente, el voltaje al que opera la batería o su temperatura).

Los conceptos de observabilidad e identificabilidad poseen múltiples vertientes en la literatura, pudiéndose destacar la distinción entre el punto de vista *estructural* y *práctico*. Sin entrar en detalles, la observabilidad e identificabilidad estructurales permiten establecer la existencia de ambigüedades (provocadas por posibles simetrías entre las variables de estado o entre los parámetros, respectivamente) cuyo origen es la propia estructura del modelo, mientras que el enfoque práctico (que debe siempre seguir al estructural) se centra en exponer dichas ambigüedades bajo condiciones más realistas, incorporando al análisis la presencia del ruido que, inevitablemente, se filtra en cualquier proceso dinámico y de toma de datos. El lector interesado puede acudir a la completa revisión [3]. El estudio de estas propiedades ha encontrado sustento en disciplinas muy diversas, tales como el álgebra y la geometría diferenciales, el análisis o la estadística. Sin embargo, la mayoría de los algoritmos propuestos para establecer estas propiedades todavía resultan, a día de hoy, demasiado costosos computacionalmente cuando se aplican al modelado físico de baterías, las cuales se caracterizan por presentar dinámicas altamente no lineales, y donde el número de variables a estimar suele exceder con creces al de observaciones.

## Bibliografía

- [1] Hu, X. et al. (2019). *State Estimation for Advanced Battery Management: Key Challenges and Future Trends*, Renewable and Sustainable Energy Reviews, **114**(13).
- [2] Jin, N. et al. (2018). *Parameter Estimation of an Electrochemistry-based Lithium-ion Battery Model using a Two-Step Procedure and a Parameter Sensitivity Analysis*, International Journal of Energy Research, **42**(7), pp. 2417–2430.
- [3] Miao, H. et al. (2011). *On Identifiability of Nonlinear ODE Models and Applications in Viral Dynamics*, SIAM Review, **53**(1), pp. 3–39.
- [4] Plett, G. L. (2015). *Battery Management Systems, Volume I: Battery Modeling*, Artech House, Boston.
- [5] Polard, T. (2020). Contenido *online* publicado en <https://www.carmagazine.co.uk/electric/ev-car-battery-capacity-tech/>
- [6] Relectrify (2021). Contenido *online* accesible en la dirección <https://www.abc.net.au/cm/rimage/9398130-3x2-xlarge.jpg?v=4>
- [7] Shrivastava, P. et al. (2019). *Overview of Model-based Online State-of-Charge Estimation using Kalman Filter Family for Lithium-ion Batteries*, Renewable and Sustainable Energy Reviews, **113**(C).

## La geometría del grupo de Heisenberg

Área de Geometría y Topología

Juan Manuel Lorenzo Naveiro

Universidade de Santiago de Compostela

24 de febrero de 2021

### Introducción

La *geometría de Riemann* tiene como objeto principal de estudio las variedades riemannianas, espacios que generalizan las superficies regulares en  $\mathbb{R}^3$  a dimensiones superiores (véase [2] para más información sobre esta disciplina). En este marco, la *geometría subriemanniana* considera las curvas en dichos espacios imponiendo una restricción sobre ellas: una curva será admisible cuando sea tangente a ciertos subespacios vectoriales, determinados mediante una distribución. Trataremos de introducir las nociones básicas de la geometría subriemanniana centrándonos en un ejemplo fundamental: el *grupo de Heisenberg*.

Aparte de ser una variedad subriemanniana de dimensión tres (lo que nos permitirá visualizar geoméricamente interesantes conceptos), el grupo de Heisenberg nos proporciona un nexo entre el problema de Dido, formulado por primera vez en la *Eneida* de Virgilio, y el cálculo de geodésicas en variedades subriemannianas. Explotaremos las soluciones del problema de Dido para construir las geodésicas y las bolas métricas en este grupo, con el fin de observar algunos fenómenos en los que la geometría de Riemann y la geometría subriemanniana divergen.

### Variedades subriemannianas

Comencemos formalizando los primeros conceptos de la geometría subriemanniana. Seguiremos la exposición desarrollada en [1] y [3].

**Definición 1.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . Una **distribución** sobre  $M$  (de rango un entero  $k \in \{1, \dots, n\}$ ) es un subconjunto  $\Delta$  del fibrado tangente  $T(M)$  de la forma*

$$\Delta = \coprod_{p \in M} \Delta_p, \quad (1)$$

*siendo  $\Delta_p$  un subespacio vectorial de  $T_p(M)$  (de dimensión  $k$ ) para cada  $p \in M$ , tal que, para cada  $p_0 \in M$ , existen campos de vectores  $X_1, \dots, X_k$  definidos en un entorno de  $p_0$  satisfaciendo  $\Delta_p = \text{span}\{X_1(p), \dots, X_k(p)\}$  para todo  $p$  en dicho entorno.*

---

PALABRAS CLAVE: Geometría subriemanniana; problema de Dido; grupo de Heisenberg; geodésicas.

**Definición 2.** Se dice que una distribución  $\Delta \subseteq T(M)$  verifica la **condición de Hörmander** si, para cada punto  $p \in M$ , se tiene la ecuación

$$[\text{Lie}(\Gamma(\Delta))]_p = T_p(M), \quad (2)$$

siendo  $\Gamma(\Delta)$  el conjunto de los campos de vectores tangentes a  $\Delta$ ,  $\text{Lie}(\Gamma(\Delta))$  el álgebra de Lie generada por  $\Gamma(\Delta)$ , y  $[\cdot]_p$  la operación “evaluar en  $p$ ”.

Intuitivamente, la condición (2) implica que, a partir de los campos tangentes a la distribución, somos capaces de recuperar el fibrado tangente entero utilizando las operaciones de suma, producto por escalares, y (en especial) el corchete de Lie.

**Definición 3.** Una **variedad subriemanniana** es una terna  $(M, g, \Delta)$ , donde  $(M, g)$  es una variedad de Riemann conexa y  $\Delta \subseteq T(M)$  es una distribución sobre  $M$  verificando la condición de Hörmander. Por simplicidad, las variedades subriemannianas las denotaremos con  $M$ .

**Definición 4.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\Delta$  una distribución sobre  $M$ . Se dice que una aplicación  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  es una **curva horizontal** si es absolutamente continua cuando esta se lee en coordenadas (en particular, existe  $\gamma'$  en casi todo instante  $t$ ) y  $\gamma'(t) \in \Delta_{\gamma(t)}$ , para casi todo  $t \in [a, b]$ .

## La distancia de Carnot-Carathéodory

Por un procedimiento análogo al que se realiza sobre variedades de Riemann, es posible dotar a una variedad subriemanniana de una estructura de espacio métrico. En esta sección se describe brevemente el proceso a seguir.

**Observación 1.** Recordemos que, para una curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow (M, g)$ , su longitud  $\mathcal{L}(\gamma)$  viene dada por la expresión

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt. \quad (3)$$

**Definición 5.** Sea  $M$  una variedad subriemanniana. La **distancia de Carnot-Carathéodory** es la aplicación  $d_{CC}: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , definida mediante

$$d_{CC}(p, q) = \inf\{\mathcal{L}(\gamma) \mid \gamma \text{ es una curva horizontal que une } p \text{ con } q\}. \quad (4)$$

Suponiendo que dos puntos cualesquiera se pueden unir por medio de una curva horizontal, se puede comprobar que, en efecto,  $d_{CC}$  define una distancia en el conjunto  $M$ . De hecho, si denotamos por  $d_R$  a la distancia de Riemann asociada a  $M$ , se verifica que  $d_{CC} \geq d_R$ . Esto se debe a que calcular la distancia de Riemann entre dos puntos  $p, q \in M$  supone tomar el ínfimo entre todas las curvas que unen  $p$  y  $q$ , sin ninguna restricción.

No obstante, ¿tenemos alguna garantía de que dos puntos se puedan unir por una curva horizontal? Aquí entra en juego la condición de Hörmander, por medio del teorema que se expone a continuación.

**Teorema 1** (de Chow, [1, Teorema 2.4.1]). *Sean  $M$  una variedad conexa y  $\Delta$  una distribución sobre  $M$  cumpliendo la condición de Hörmander. Para cualesquiera  $p, q \in M$ , existe una curva horizontal  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  tal que  $\gamma(a) = p$  y  $\gamma(b) = q$ . Es más, podemos escoger  $\gamma$  de manera que sea diferenciable a trozos.*

El Teorema 1 justifica que  $d_{CC}$  está bien definida (en el sentido de que siempre es finita). En analogía con la geometría de Riemann, se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 1** ([1, Teorema 2.3.8]). *El par  $(M, d_{CC})$  es un espacio métrico. Además, la topología inducida por la distancia  $d_{CC}$  coincide con la topología inducida en  $M$  por la estructura de variedad diferenciable.*

## El problema de Dido en el plano

Sea  $\alpha: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva tal que  $\alpha(0) = (0, 0)$ . Si  $\alpha$  es simple y cerrada, el Teorema de Green nos garantiza que el número real

$$\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^T x(t)y'(t) - y(t)x'(t)dt \quad (5)$$

representa el área (con signo dependiente de la orientación) encerrada por  $\alpha$ . De no ser cerrada, añadiendo el segmento que une  $(0, 0)$  con  $\alpha(T)$  obtenemos una curva cerrada  $\tilde{\alpha}$  que encierra área  $\mathcal{A}(\alpha)$ .

En el problema de Dido nos planteamos la siguiente cuestión. Si  $q$  es un punto del plano,  $A \in \mathbb{R}$ , y consideramos las curvas  $\alpha$  que unen  $(0, 0)$  y  $q$  encerrando área  $\mathcal{A}(\alpha) = A$ , ¿cuáles de ellas tienen longitud mínima? No fue hasta el siglo XIX cuando se pudo dar una solución rigurosa a este problema; las soluciones son los arcos de circunferencia (en el caso de que  $A = 0$ , las soluciones son los segmentos de recta). Una demostración de este hecho se puede consultar en [1, Apéndice B].

## El grupo de Heisenberg

Nuestro objetivo actual es recoger la información del problema de Dido en una variedad subriemanniana de dimensión tres. Con este fin, levantaremos las curvas planas a  $\mathbb{R}^3$  añadiendo una tercera coordenada que represente el área barrida en cada instante. Así, diremos que el grupo de Heisenberg es la variedad  $\mathbb{G} = \mathbb{R}^3$ , a la cual le exigiremos que sus curvas horizontales sean aquellas obtenidas por este proceso de levantamiento. Además, dotaremos a  $\mathbb{G}$  de una métrica tal que el acto de levantar una curva plana preserve su longitud.

En primer lugar, volvamos a considerar una curva  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  en  $\mathbb{R}^2$  tal que  $\alpha(0) = (0, 0)$ . Levantamos dicha curva a  $\mathbb{R}^3$  mediante

$$z(t) = \mathcal{A}(\alpha|_{[0,t]}) = \frac{1}{2} \int_0^t x(s)y'(s) - y(s)x'(s)ds. \quad (6)$$

Entonces, derivando con respecto de  $t$ , obtenemos la ecuación (lineal en  $x'(t)$ ,  $y'(t)$  y  $z'(t)$ )

$$z'(t) = \frac{1}{2} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)). \quad (7)$$

Consideraremos horizontales entonces las curvas que verifiquen (7). Esto se traduce en que la distribución que debemos emplear es  $\Delta = \ker \xi$ , siendo

$$\xi = dz - \frac{1}{2}(xdy - ydx). \quad (8)$$

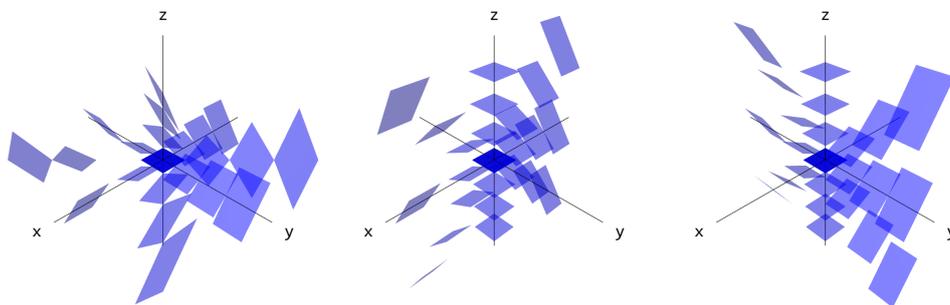


Figura 1: Valores de la distribución  $\Delta$  en puntos de los planos coordenados.

Se puede comprobar que  $\Delta = \text{span}\{X, Y\}$ , donde

$$X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (9)$$

Además,  $[X, Y] = Z$ , lo que implica que  $\Delta$  satisface la condición de Hörmander. Si escogemos la métrica  $g$  que hace de  $X, Y, Z$  campos ortonormales, entonces la aplicación  $\pi: (x, y, z) \in \mathbb{G} \mapsto (x, y)$  preserva la longitud de las curvas horizontales (con respecto de la métrica  $g$  y la métrica euclídea en  $\mathbb{R}^2$ ). Obsérvese que este hecho establece una correspondencia entre las soluciones del problema de Dido y las geodésicas que parten del origen en  $\mathbb{G}$ .

**Definición 6.** Llamamos *grupo de Heisenberg* a la variedad  $\mathbb{G} \equiv (\mathbb{R}^3, \Delta, g)$ .

### Operación en $\mathbb{G}$

**Definición 7.** Dados  $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{G}$ , se define su producto mediante

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = \left( x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - yx') \right). \quad (10)$$

Las traslaciones por la izquierda  $L_g$ , dadas por  $L_g(h) = g \cdot h$ , son isometrías de  $\mathbb{G}$ , bien como variedad (sub)riemanniana o como espacio métrico. Esto se deduce del

hecho de que preservan la referencia ortonormal  $\{X, Y, Z\}$  definida en (9). En consecuencia,  $\mathbb{G}$  tiene estructura de grupo de Lie, cuya álgebra de Lie es precisamente  $\mathfrak{g} = \text{Span}\{X, Y, Z\}$  (conocida como el *álgebra de Heisenberg*).

En particular, las traslaciones  $L_g$  preservan geodésicas, de manera que si conocemos las que parten de un punto fijado (por ejemplo, el origen), podemos obtener todas ellas empleando convenientemente estas traslaciones. Nos bastará entonces hallar las geodésicas que empiezan en  $(0, 0, 0)$ .

### Geodésicas de $\mathbb{G}$ que parten del origen

Como indicamos anteriormente, para obtener estas curvas tenemos que levantar las soluciones del problema de Dido. Este proceso se lleva a cabo en los siguientes pasos.

**Paso 1:** Parametrizamos por arco las circunferencias que pasan por el origen y tienen centro situado sobre el eje  $x$ , junto con la recta  $x = 0$ :

$$\psi(k, t) = \left( \frac{\cos(kt) - 1}{k}, \frac{\sin(kt)}{k} \right), \quad k \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{|k|}. \quad (11)$$

**Paso 2:** Mediante rotaciones de ángulo  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  obtenemos las demás circunferencias y rectas, consiguiendo así todas las soluciones:

$$\begin{aligned} x(\theta, k, t) &= \frac{\cos \theta (\cos(kt) - 1) - \sin \theta \sin(kt)}{k}, \\ y(\theta, k, t) &= \frac{\sin \theta (\cos(kt) - 1) + \cos \theta \sin(kt)}{k}. \end{aligned} \quad (12)$$

**Paso 3:** Levantamos las curvas  $(x, y)$  añadiendo la coordenada “área barrida”:

$$z(\theta, k, t) = \frac{1}{2} \int_0^t x(\theta, k, s) \frac{\partial y}{\partial s}(\theta, k, s) - y(\theta, k, s) \frac{\partial x}{\partial s}(\theta, k, s) ds = \frac{kt - \sin(kt)}{2k^2}. \quad (13)$$

Fijando valores de  $\theta$  y  $k$ , y haciendo variar  $t$ , obtenemos las distintas geodésicas. Conviene destacar que, a diferencia de como sucede en las variedades de Riemann, los puntos del eje  $z$  se pueden unir al origen mediante infinitas geodésicas, independientemente de lo próximos que estén (véase la Figura 2).

### Bolas en el grupo de Heisenberg

Si en las expresiones (12) y (13) fijamos  $t$  y hacemos variar  $k$  y  $\theta$ , conseguimos parametrizar las esferas de  $\mathbb{G}$  centradas en el origen, tal y como se puede ver en la Figura 2. A nivel topológico, las bolas (respectivamente, esferas) de  $\mathbb{G}$  son homeomorfas a la bola (esfera) unidad de  $\mathbb{R}^3$ , lo que daría pie a pensar que esta propiedad se cumple en cualquier variedad subriemanniana. A día de hoy, sin embargo, todavía es un problema abierto el determinar si, en una variedad subriemanniana  $M$ , las bolas de radio suficientemente pequeño son topológicamente bolas euclidianas.

Para terminar, vamos a comentar brevemente cómo varía el volumen de una bola en  $\mathbb{G}$  en términos de su radio.

**Definición 8.** Se define la **dilatación**  $\delta_\lambda$  de factor  $\lambda > 0$  mediante

$$\delta_\lambda: (x, y, z) \in \mathbb{G} \mapsto (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{G}. \quad (14)$$

Denotemos con  $B_{CC}(p, R)$  a la bola en  $\mathbb{G}$  de centro  $p$  y radio  $R$  con respecto de la distancia de Carnot-Carathéodory. Empleando dilataciones, es sencillo comprobar que esta bola se puede expresar como  $B_{CC}(p, R) = L_p(\delta_R(B_{CC}(0, 1)))$ . Aplicando el Teorema de Cambio de Variable, se deduce que el volumen de la bola  $B_{CC}(p, R)$  es  $CR^4$ , siendo  $C = \text{Vol}(B_{CC}(0, 1))$  una constante positiva. Que el exponente que acompañe a  $R$  sea 4 puede parecer llamativo, ya que la dimensión topológica de  $\mathbb{G}$  es tres. Sin embargo, esta relación entre volúmenes y radios se entiende mejor mediante la *dimensión de Hausdorff* (un tipo de dimensión que se puede asociar a cualquier espacio métrico), que en el caso del grupo de Heisenberg es cuatro. En general, la dimensión de Hausdorff de una variedad subriemanniana es siempre superior a su dimensión como variedad topológica.

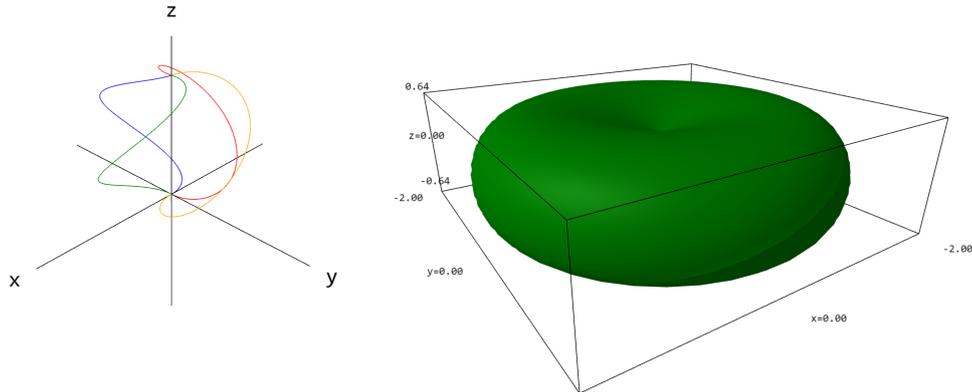


Figura 2: Izquierda: geodésicas del grupo de Heisenberg uniendo  $(0, 0, 0)$  con un punto de la forma  $(0, 0, z)$ . Derecha: una esfera en el grupo de Heisenberg centrada en  $(0, 0, 0)$ .

## Bibliografía

- [1] LeDonne, E. *Lecture notes on sub-Riemannian geometry*, <https://sites.google.com/site/enricoledonne/> (notas). Consultado por última vez: febrero 2021.
- [2] Lee, J. M. (2018). *Introduction to Riemannian Manifolds*, Springer, Cham.
- [3] Montgomery, R. (2002). *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*, American Mathematical Society, Providence.



## Distance covariance and optimal transport in high energy physics

Area of Statistics, Mathematical Analysis and Optimization

Carlos García Meixide

Universidade de Santiago de Compostela

10th March, 2021

The standard model of particle physics (SM) has been the most successful theory to explain subatomic nature. However, it does not account for certain evidence such as the presence of dark matter or for a formal explanation of the so called *hierarchy problem*.

Twice a petabyte of information is produced every year at the LHC searching, among other phenomena, experimental hits of *physics beyond the SM*. Thus, new unsupervised approaches to data analysis have proliferated in recent months as the structure of a hypothetical *new physics* has not been discovered yet.

In the present work, new insights to tackle this problem are to be assessed, particularly an unsupervised approach to data grouping according to the underlying quantum chromodynamics hard process (*Feynman diagram*) based on endowing the set of event observations with a special distance function using optimal transport.

We shall start by introducing the fundamental physics laws and probability theory concepts on which the problem can be accurately enunciated.

### The axioms of quantum mechanics (QM)

**Axiom 1.** *The description of a physical system in QM is accomplished in terms of the elements of a separable complex Hilbert space associated with the physical system.*

In our discussion, such space will be assumed to be infinite dimensional and therefore isometrically isomorphic to

$$\ell^2 = \left\{ \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

---

KEYWORDS: collider physics; quantum mechanics; functional analysis; probability theory; unsupervised learning; clustering; kernel methods; energy statistics.

Let us suppose that we are studying the (one dimensional) momentum of a system for which associated space is  $L^2(\mu)$ , where  $\mu$  is the Lebesgue measure on the real line. Then its state is given by a certain element  $\psi \in L^2(\mu)$ . Quantum physics interprets it as a complex function such that its squared magnitude results in the probability density function of the random variable “momentum of the system after measuring it”.

Now, if  $\psi \in L^2(\mu)$ , then  $\rho := |\psi|^2 \in L^1(\mu)$ . Then  $\rho$  generates a new measure by the formula

$$\nu(A) = \int_A \rho d\mu, \quad A \in \mathcal{A},$$

where  $\mathcal{A}$  is a Borel  $\sigma$ -algebra on the real line. In this case we say that the function  $\rho$  is the density (or the Radon-Nikodym density) of the probability measure  $\nu$  with respect to  $\mu$ . This is denoted by  $d\nu/d\mu$ . We write  $\nu = \rho \cdot \mu$ . See [3] for further details.

The remnants of a collision are far away from being a single particle. Actually, the amount of outgoing entities is a random positive integer number, each of them equipped with their own momenta (Euclidean three-dimensional) space and the associated probability measure as discussed above. We now seek for the existence of a joint probability law whose marginals are each individual particle measure. This is given by the following result.

**Theorem 1** (Kolmogorov consistency theorem [2]). *If  $(E, B)$  is a measurable Polish space,  $I$  an arbitrary non-empty set and  $(P_J)_{J \in \mathcal{P}(I)}$  any projective family of probability measures over  $E$ , then there exists a unique probability measure  $P_I$  on  $(E^I, B^I)$  satisfying*

$$p_J(P_I) = P(J) \quad \text{for all } J \in \mathcal{P}(I).$$

Taking into account that every Banach space is Polish and setting  $I = \mathbb{N}$ , we obtain the probability law of an individual *channel*, that is, a possible configuration of outgoing particles. As a rigorous definition of channel is beyond the scope of this text, [9] can be seen for further details.

**Definition 1.** *Let  $\mathcal{C}$  be the collection of all channels. The **asymptotic Hilbert space** is defined as  $H_{asym} = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{C}} H_\alpha$ , where each  $H_\alpha = L^2(\mathbb{R}^{3k})$  is the Hilbert space associated to channel  $\alpha$  and  $k \in \mathbb{N}$  the final number of particles that channel  $\alpha$  involves.*

The probability law of the final observed event lies inside  $H_{asym}$  because the total momenta space can be regarded as the topological sum of each channel. This is a consequence of the following result.

**Lema 1.** *Let  $\{(X_i, \Omega_i, \mu_i) : i \in I\}$  be a collection of measure spaces. Define  $X, \Omega$  and  $\mu$  as follows. Let  $X = \sqcup \{X_i : i \in I\}$  and  $\Omega = \{\Delta \subset X : \Delta \cap X_i \in \Omega_i, \forall i \in I\}$ . For  $\Delta$  in  $\Omega$  put  $\mu(\Delta) = \sum_i \mu_i(\Delta \cap X_i)$ . Then  $(X, \Omega, \mu)$  is a measure space and  $L^2(X, \Omega, \mu)$  is isomorphic to  $\bigoplus \{L^2(X_i, \Omega_i, \mu_i) : i \in I\}$ .*

Let us introduce the postulate that allows time evolution in quantum physics.

**Axiom 2.** *In the time interval between two consecutive measurements, pure states of a physical system continue to be pure, and there exists in every unit ray  $|\Psi(t)\rangle_{\mathbb{R}}$  some representative state vector  $|\Psi(t)\rangle$  such that the evolution is given by Schrodinger equation*

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle,$$

where  $H$  is the operator associated with an observable, called the Hamiltonian of the system.

**Definition 2.** *Let  $U(t, s)$  be the unitary propagator obtained through solving Schrodinger's equation for the Hamiltonian  $H(t) = H_0 + V(t)$ . We define the **associated wave operators** as*

$$\Omega^{\pm} \equiv s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp\infty} U(t, 0)^* e^{-iH_0 t},$$

as long as these limits exist, where *s-lim* denotes convergence with the operators norm (strong limit) and  $*$  means adjoint operator.

**Definition 3.** *Let  $S : H_{asym} \rightarrow H_{asym}$  be the operator  $S = (\Omega^-)^* \Omega^+$ .  $S$  is called the **S-operator**, **S-matrix**, or **scattering operator**.*

Talking about collider physics is equivalent to explore quantum scattering theory. The role of the scattering matrix is key to a theoretical analysis of our problem. It simply stores the probability that a particular final state takes place as a function of an initial configuration; namely, two protons moving towards each other before smashing. Quantum field theory tries to compute the entries of such matrix in terms of *Feynman diagrams* in perturbative regimes. This constitutes the connection with observable quantities in the experimental world.

## The Machine Learning framework of the problem

Since the Higgs boson has been contrasted to exist in 2012 (see [1] or [4]), the SM has been corroborated to be correct run after run at particle accelerators. Throughout these two decades, many theoretical extensions such as supersymmetry have been proposed with sights on solving the aforementioned problems. After each alternative formulation, the techniques above were used to introduce expert knowledge in stochastic simulations. Next, these outputs were compared with real data using a likelihood ratio test to contrast the alternative hypothesis of new physics existence.

Three possible explanations of discovery absence are held (see [8]):

1. We need more sophisticated particle colliders hardware, for example operating at higher energies, to notice signals of new physics.

2. Given the infrequent nature of strange experimental signatures, we must be patient and wait until rare phenomena shows up.
3. The community is not looking at the correct place, neither in a spatial sense nor statistically speaking (see [8]).

We present a novel fully-unsupervised technique based on considering energy statistics framework within clustering (see [5]).

**Definition 4** (Semimetric). *Let  $\mathcal{Z}$  be a nonempty set and let  $\rho : \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \rightarrow [0, \infty)$  be a function such that for every  $z, z' \in \mathcal{Z}$ , then:*

1.  $\rho(z, z') = 0$  if and only if  $z = z'$ ,
2.  $\rho(z, z') = \rho(z', z)$ .

Then  $(\mathcal{Z}, \rho)$  is said to be a **semimetric space** and  $\rho$  is called a **semimetric** on  $\mathcal{Z}$ .

**Definition 5** (Negative type). *The semimetric space  $(\mathcal{Z}, \rho)$  is said to have **negative type** if for every  $n \geq 2, z_1, \dots, z_n \in \mathcal{Z}$ , and  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , with  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ ,*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \rho(z_i, z_j) \leq 0.$$

**Proposition 1.** *The following statements hold:*

1. If  $\rho$  has negative type then so does  $\rho^q$ , for  $0 < q < 1$ .
2.  $\rho$  is a semimetric of negative type if and only if there exists a Hilbert space  $\mathcal{H}$  and an injective map  $\varphi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{H}$ , such that

$$\rho(z, z') = \|\varphi(z) - \varphi(z')\|_{\mathcal{H}}^2.$$

**Definition 6** (Reproducing Kernel Hilbert Space). *Let  $\mathcal{H}$  be a Hilbert space of real-valued functions over  $\mathcal{X}$ . A function  $K : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  is a **reproducing kernel** of  $\mathcal{H}$  if it satisfies the following two conditions:*

1.  $h_x \equiv K(\cdot, x) \in \mathcal{H}$  for all  $x \in \mathcal{X}$ ,
2.  $\langle h_x, f \rangle_{\mathcal{H}} = f(x)$  for all  $x \in \mathcal{X}$  and  $f \in \mathcal{H}$ .

If such a kernel function  $K$  exists, then  $\mathcal{H}$  is called a **RKHS**.

**Theorem 2** (Moore-Aronszajn). *For every symmetric and positive definite function  $K : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , there is an associated RKHS,  $\mathcal{H}_K$ , with reproducing kernel  $K$ . The map  $\varphi : x \in \mathcal{X} \mapsto h_x \in \mathcal{H}_K$  is called the **canonical feature map**.*

**Remark 1.** Let  $\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  and  $x_0 \in \mathcal{X}$  an arbitrary but fixed point. Define

$$K(x, y) \equiv \frac{1}{2} [\rho(x, x_0) + \rho(y, x_0) - \rho(x, y)].$$

Then,  $K$  is positive definite if and only if  $\rho$  is a semimetric of negative type. Conversely, if  $\rho$  is a semimetric of negative type and  $K$  is a kernel in this family, then

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= K(x, x) + K(y, y) - 2K(x, y) \\ &= \|h_x - h_y\|_{\mathcal{H}_K}^2, \end{aligned}$$

and the canonical feature map  $\varphi$  is injective. When these conditions are satisfied, we say that the kernel  $K$  generates the semimetric  $\rho$ . If two different kernels generate the same  $\rho$ , they are said to be equivalent kernels.

For a given kernel  $K$ , the clustering problem amounts to finding the best partitioning of the data by minimizing a certain statistic (see [5]).

**Lema 2** (Franca, Rizzo, Vogelstein (2020)). Let  $\mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$  where each data point  $x_i$  lives in a space  $\mathcal{X}$  endowed with a semimetric  $\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  of negative type. For a fixed integer  $k$ , the partition  $\mathbb{X} = \bigcup_{j=1}^k C_j^*$ , where  $C_i^* \cap C_j^* = \emptyset$  for all  $i \neq j$ , maximizes the between-sample statistic  $S$ , if and only if

$$\{C_1^*, \dots, C_k^*\} = \arg \min_{C_1, \dots, C_k} \mathcal{W}(C_1, \dots, C_k),$$

where  $\mathcal{W}$  is the so-called “within energy dispersion” defined in [5].

Based on the relationship between kernels and semimetrics of negative type, assume that the kernel  $K : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  generates  $\rho$ . Define the Gram matrix

$$G \equiv \begin{pmatrix} K(x_1, x_1) & \cdots & K(x_1, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_n, x_1) & \cdots & K(x_n, x_n) \end{pmatrix}.$$

The explicit optimization problem behind our configuration in the corresponding RKHS is given by the following result, which establishes the connection with kernel methods.

**Theorem 3** (Franca, Rizzo, Vogelstein (2020)). The previous optimization problem is equivalent to

$$\begin{aligned} \max_H \operatorname{Tr} [H^\top (\mathcal{W}^{1/2} G \mathcal{W}^{1/2}) H] \\ \text{subject to } H \geq 0, \\ H^\top H = I, \\ HH^\top \omega = \omega, \end{aligned}$$

where  $G$  is the Gram matrix.

The final step consists in solving the celebrated problem of choosing a kernel  $K$ . The Energy Mover's Distance (EMD) has been proposed in [7] as a metric between events. It is based on the well-known earth mover's distance, also known as the Wasserstein metric. EMD, which operates purely at the level of observable energy flow information, allows for a clarified definition of infrared and collinear safety and related concepts. Its value can be obtained by solving the following optimal transport problem between energy flows  $\mathcal{E}$  and  $\mathcal{E}'$ :

$$\text{EMD}_{\beta,R}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = \min_{\{f_{ij} \geq 0\}} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{M'} f_{ij} \left( \frac{\theta_{ij}}{R} \right)^\beta + \left| \sum_{i=1}^M E_i - \sum_{j=1}^{M'} E'_j \right|$$

s.t.  $\sum_{i=1}^M f_{ij} \leq E'_j, \quad \sum_{j=1}^{M'} f_{ij} \leq E_i, \quad \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{M'} f_{ij} = \min \left( \sum_{i=1}^M E_i, \sum_{j=1}^{M'} E'_j \right),$

where  $\theta_{ij}$  is a pairwise distance between particles known as the ground metric,  $R > 0$  is a parameter controlling the tradeoff between transporting energy and destroying it, and  $\beta > 0$  is an angular weighting exponent.

The big question is: which  $\theta_{ij}$  must be chosen in order to turn EMD a semimetric of negative type and be therefore compatible with the clustering algorithm exposed above? [6].

## References

- [1] Aad, G. et al. (2012). *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*, Physics Letters B, **716**(1), pp. 1–29.
- [2] Bauer, H. (2011) *Probability Theory*, De Gruyter, New York.
- [3] Bogachev, V. I. (2018). *Weak convergence of measures*, American Mathematical Society, Providence.
- [4] Chatrchyan, S. et al. (2012). *Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC*, Physics Letters B, **716**(1), pp. 30–61.
- [5] Franca, G., Rizzo, M. and Vogelstein, J. T. (2020). *Kernel  $k$ -Groups via Hartigan's Method*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, pp. 1–1.
- [6] Gardner A., Duncan, C. A., Kanno, J. and Selmic, R. R. (2017). *On the Definiteness of Earth Mover's Distance and Its Relation to Set Intersection*, IEEE Transactions on Cybernetics, **48**(11), pp. 3184–3196.
- [7] Komiske, P. T., Metodiev, E. M. and Thaler, J. (2020). *The hidden geometry of particle collisions*, Journal of High Energy Physics **2020**(7), pp. 1–53.
- [8] Nachman, B. (2020). *Anomaly Detection for Physics Analysis and Less than Supervised Learning*. arXiv:2010.14554.
- [9] Reed, M. and Simon, B. (1979). *Scattering theory. Methods of modern mathematical physics, Vol. 3*, Elsevier, Amsterdam.

## Cómo la teoría de haces puede ayudar en la torre de control de un aeropuerto

Área de Álgebra

Patricia Guerra Balboa

Universidade de Santiago de Compostela

23 de marzo de 2021

### Introducción

Expondremos los conceptos básicos de la teoría de haces ayudándonos de la teoría de categorías. Emplearemos la cohomología con coeficientes en un haz celular como herramienta principal para el análisis de sistemas. Mediante esta técnica podremos realizar un estudio del buen funcionamiento del sistema de sensores de un modelo de aeropuerto.

### Haces sobre un espacio topológico

En esta sección introduciremos el concepto clásico de haz. El principal interés que los haces tendrán para nuestro trabajo es la expresión precisa de la relación entre la información expresada localmente y la información global de un sistema. El concepto de haz se construye sobre la noción previa de prehaz.

**Definición 1.** Sea  $X$  un espacio topológico. Un **prehaz sobre conjuntos**  $\mathcal{F}$  en  $X$  consiste en una aplicación tal que:

- Para todo abierto  $U$  de  $X$ ,  $\mathcal{F}(U)$  es un conjunto.
- Dados dos abiertos  $U, V$  de  $X$ ,  $U \subseteq V$ , existe una aplicación  $\text{res}_U^V: \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  verificando:
  - $\text{res}_U^U = \text{Id}_{\mathcal{F}(U)}$ , para todo  $U \subseteq X$  abierto.
  - Dados  $U \subseteq V \subseteq W$  abiertos de  $X$  se tiene que  $\text{res}_U^W = \text{res}_U^V \circ \text{res}_V^W$ .

**Observación 1.** La aplicación  $\text{res}_U^V: \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  recibe el nombre de **aplicación restricción**. Los elementos  $\mathcal{F}(U)$  se denominan **secciones** de  $\mathcal{F}$  en  $U$  y dados dos abiertos  $U, V$  de  $X$ ,  $U \subseteq V$ , y  $s \in \mathcal{F}(V)$ , denotamos  $s|_U = \text{res}_U^V(s)$ .

**Definición 2.** Sea  $X$  un espacio topológico. Un prehaz  $\mathcal{F}$  en  $X$  se dice **haz** cuando para todo abierto  $U$  de  $X$  y para todo recubrimiento por abiertos  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $U$  se verifica que:

---

PALABRAS CLAVE: haces; haces celulares; cohomología de haces celulares.

1. Dados  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ ,  $i \in I$ , tales que para todo  $i, j \in I$ ,  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ , entonces existe  $s \in \mathcal{F}(U)$  tal que  $s|_{U_i} = s_i$  para todo  $i \in I$ .
2. Si  $s, s' \in \mathcal{F}(U)$  son tales que  $s|_{U_i} = s'|_{U_i}$  para cada  $i \in I$ , entonces  $s = s'$ .

### Haces y categorías

Pese a que en su definición no se aprecia ninguna referencia categórica, el estudio de los haces no tiene sentido sin la teoría de categorías pertinente. Exponemos por lo tanto conceptos básicos necesarios:

**Definición 3.** Una **categoría**  $\mathbf{C}$  consiste en una clase de objetos, denotados por  $\text{Ob}(\mathbf{C})$ , y un conjunto de morfismos o flechas entre objetos  $a, b \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ , que denotaremos por  $\text{Fl}_{\mathbf{C}}(a, b)$ , verificando las siguientes propiedades:

- Para todo  $a \in \text{Ob}(\mathbf{C})$  existe la flecha  $\text{Id}_a: a \rightarrow a$ .
- Dadas las flechas  $f \in \text{Fl}_{\mathbf{C}}(a, b)$  y  $g \in \text{Fl}_{\mathbf{C}}(b, c)$ , estas se pueden componer para obtener otra flecha  $g \circ f \in \text{Fl}_{\mathbf{C}}(a, c)$  verificando que:
  - La composición de flechas es asociativa, es decir, si  $h \in \text{Fl}_{\mathbf{C}}(c, d)$  entonces  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ .
  - Dados  $a, b \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ , para toda  $f \in \text{Fl}_{\mathbf{C}}(a, b)$  se verifica que  $f \circ \text{Id}_a = f = \text{Id}_b \circ f$ .

**Ejemplo 1.** Dado un cuerpo  $k$ , la categoría  $\mathbf{Vect}_k$  es aquella cuyos objetos son  $k$ -espacios vectoriales y cuyas flechas son las aplicaciones lineales entre  $k$ -espacios vectoriales. Es claro que verifica los axiomas de categoría.

**Ejemplo 2.** Dado un espacio topológico  $X$  definimos  $\mathbf{Open}(X)$  como la categoría que tiene como objetos los conjuntos abiertos de  $X$  y una única flecha o morfismo  $U \rightarrow V$  para cada par de abiertos relacionados por la inclusión  $U \subseteq V$ .

**Definición 4.** Dadas dos categorías  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$ , un **funtor covariante** de  $\mathbf{C}$  en  $\mathbf{D}$  es una aplicación  $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  que lleva objetos de  $\mathbf{C}$  en objetos de  $\mathbf{D}$  y flechas de  $\mathbf{C}$  en flechas de  $\mathbf{D}$  verificando que, dados  $x, y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ , se tiene que para toda flecha  $f: x \rightarrow y$ ,  $F(f): F(x) \rightarrow F(y)$  cumple que  $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$  y  $F(\text{Id}_a) = \text{Id}_{F(a)}$ .

**Observación 2.** Es interesante comparar la noción de prehaz con la noción de funtor. Tomemos la categoría  $\mathbf{Open}(X)$  y la categoría de conjuntos  $\mathbf{Set}$  (véase [2]). Un prehaz es un caso particular de **funtor contravariante** (véase [2]) en el que el dominio es  $\mathbf{Open}(X)$  y el codominio es  $\mathbf{Set}$ , como ilustra la Figura 1.



Figura 1: Un prehaz es un funtor contravariante.

## Complejos celulares regulares y haces celulares

Dentro de los espacios topológicos hay un caso particular que nos interesará notoriamente, pues sobre ellos podemos definir los haces celulares que, siendo categóricamente equivalentes a los haces, serán mucho más fáciles de calcular y analizar para nuestro cometido. Estos son los conocidos como **complejos celulares regulares** cuya definición se puede consultar en [1].

**Definición 5.** Dado  $X$  un complejo celular regular, podemos definir una categoría donde los objetos serán los elementos de la partición  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{P}_X}$ , indexada por  $\mathcal{P}_X$ , y las flechas son las dadas por la relación de orden, es decir, entre  $X_\beta$  y  $X_\alpha$  existe una flecha (que será única) si, y solo si,  $X_\beta \subseteq \overline{X_\alpha}$ . Denotaremos esta categoría como  $\mathbf{Cell}(X)$ .

**Definición 6.** Dado un complejo celular regular  $X$  y una categoría <sup>1</sup>  $\mathbf{D}$ , un **haz celular**  $\mathcal{F}$  evaluado en  $\mathbf{D}$  sobre  $X$  es un funtor covariante:

$$\mathcal{F}: \mathbf{Cell}(X) \rightarrow \mathbf{D}.$$

**Observación 3.** Se puede demostrar que los haces y los haces celulares son categóricamente equivalentes. Por ello, a partir de ahora trabajaremos con haces celulares ya que el cálculo de su cohomología resulta mucho más sencillo.

### Cohomología de haces celulares

Como se puede consultar en [1], se puede definir de forma sencilla una cohomología con coeficientes en un haz celular, en este caso cuyo codominio sea  $\mathbf{Vect}_k$ .

**Observación 4.** Sea  $X = \{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{P}_X}$  un complejo celular regular y  $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_X$ . Decimos que:

$$\alpha \leq_i \beta \Leftrightarrow \dim(X_\beta) - \dim(X_\alpha) = i.$$

Para entender el concepto de  $\dim(X_\alpha)$  véase [1]

**Definición 7.** Sea  $X$  un complejo celular regular. Una **relación de incidencia signada** es una asignación que a cada pareja  $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_X$  le asocia un número  $[\alpha : \beta] \in \{\pm 1, 0\}$  satisfaciendo:

- $[\alpha : \beta] \neq 0 \Rightarrow \alpha \leq_1 \beta$ .
- Fijadas  $\alpha, \beta$  entonces  $\sum_{\sigma \in \mathcal{P}_X} [\alpha : \sigma][\sigma : \beta] = 0$ .

**Definición 8.** Definimos un **complejo de cocadenas**  $(V^\bullet, d^\bullet)$  como una colección de  $k$ -espacios vectoriales  $\{V^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  (que llamaremos grupo de cocadenas) y una colección de aplicaciones lineales  $d^i: V^i \rightarrow V^{i+1}$  (que llamaremos diferenciales) satisfaciendo que  $d^{i+1} \circ d^i = 0$ .

<sup>1</sup>Solo se admiten categorías  $\mathbf{D}$  cuyos objetos sean conjuntos, dotados o no de una estructura de mayor complejidad, y cuyas flechas sean aplicaciones entre ellos, respetando dicha estructura adicional, de ser el caso.

**Definición 9.** Sea  $\mathcal{F}: \text{Cell}(X) \rightarrow \text{Vect}_k$  un haz celular. Si  $\alpha$  denota una celda de  $X$ , definimos las  $n$ -cocadenas de  $X$  con respecto a  $\mathcal{F}$ , para  $n \leq 0$ , como la suma directa de los  $k$ -espacios vectoriales  $\mathcal{F}(\alpha)$  tales que  $\alpha$  tiene dimensión  $n$ :

$$C^n(X; \mathcal{F}) = \bigoplus_{\alpha | \dim(\alpha)=n} \mathcal{F}(\alpha).$$

Estos espacios son las componentes de un espacio vectorial graduado denotado por  $C(X; \mathcal{F})$ . Dadas  $\rho_{\alpha, \beta}: C^n(X; \mathcal{F}) \rightarrow C^{n+1}(X; \mathcal{F})$  aplicaciones lineales con  $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_X$ ,  $\alpha \leq \beta$ , definimos

$$d^n = \sum_{\alpha \leq \beta} [\alpha : \beta] \rho_{\alpha, \beta},$$

que recibe el nombre de diferencial. Por lo tanto, las anteriores  $n$ -cocadenas y diferenciales forman un complejo sobre el que podemos definir la cohomología  $n$ -ésima

$$H^n(X; \mathcal{F}) = \frac{\ker(d^n)}{\text{im}(d^{n-1})}.$$

## Aplicaciones al control del tráfico aéreo

### Modelización

En el contexto presentado en [3], para obtener los datos esenciales para el control del tráfico aéreo contamos con diferentes sensores que nos dan datos heterogéneos de los cuales se necesita una adquisición de información integrada. Un sistema típico de control podría consistir en los sensores mostrados en la Tabla 1:

Tipo de sensor	Número de duplicados
Radar ( $R$ )	$n$
GPS( $G$ )	$m$
Detectores de superficie del aeropuerto ( $K$ )	$p$
Sensores de rayos infrarrojos( $I$ )	$q$

Tabla 1: Sensores de aeropuerto.

Los sensores del mismo tipo comunican datos comunes. Por otra parte, en un instante  $t_0$  dado, se reciben una serie de datos heterogéneos de distintos sensores, como muestra la Tabla 2: estado del avión,  $e$  (espacio de medida:  $\mathbb{R}$ ); coordenadas del avión,  $c$  (espacio de medida:  $\mathbb{R}^3$ ); dirección,  $d$  (espacio de medida:  $\mathbb{R}^3$ ); y velocidad,  $s$  (espacio de medida:  $\mathbb{R}$ ).

Sensor	$e$	$c$	$d$	$s$
$R$	no	sí	sí	sí
$G$	no	sí	no	no
$K$	sí	no	sí	no
$I$	sí	no	no	sí

Tabla 2: Relación entre datos y sensores.

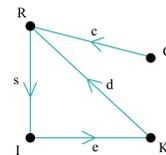


Figura 2: Grafo asociado.

Tomando los sensores como nodos y la información compartida entre ellos como aristas, obtenemos el grafo de la Figura 2 (caso particular de complejo simplicial). Ahora que ya tenemos nuestro complejo celular regular, vamos a construir un haz celular sobre él, es decir, un funtor  $\mathcal{F}: \mathbf{Cell}(X) \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ . Este haz va a llevar cada sensor y cada tipo de datos en el espacio de medida de datos en el que se mueven:

- $F(c) = \mathbb{R}^3, F(d) = \mathbb{R}^3, F(e) = \mathbb{R}, F(s) = \mathbb{R}$ .
- $R$  recaba datos de coordenadas, dirección y velocidad, por lo tanto  $F(R) = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}$ ;  $G$  recoge datos de las coordenadas, por ello  $F(G) = \mathbb{R}^3$ ;  $K$  aporta datos de estatus y dirección, por consiguiente  $F(K) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ ; e  $I$  mide estatus del avión y velocidad, luego  $F(I) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ .

Analizando nuestra categoría  $\mathbf{Cell}(X)$  nos encontramos con la situación de la Figura 3, donde las aplicaciones restricción son, por estar en la categoría  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ , aplicaciones lineales y admiten una expresión matricial que sabemos calcular.

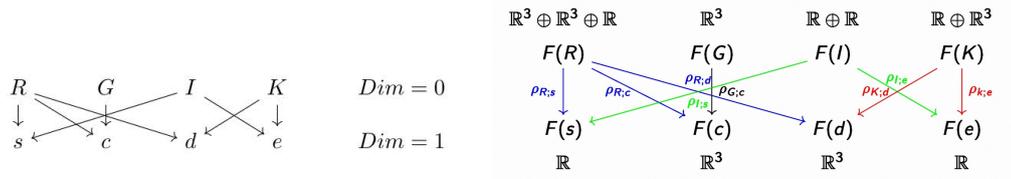


Figura 3: Haz celular.

### Cálculo de la cohomología del haz

Ahora que ya tenemos nuestro sistema modelizado, procedamos al cálculo de su cohomología para obtener información. En la notación que sigue, no haremos referencia a  $X$  ni a  $\mathcal{F}$ . Calculamos  $C^0 = F(R) \oplus F(G) \oplus F(I) \oplus F(K) = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^{16}$ ,  $C^1 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^8$  y  $C^n = \{0\}$  para todo  $n \geq 2$ . Además,  $d^n$  es una aplicación lineal entre espacios vectoriales así que va admitir representación matricial. Se tiene que  $d^n = 0$  para todo  $n \geq 1$  y

$$d^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que ordenando las filas de  $d^0$  adecuadamente tenemos una matriz escalonada sabemos que tiene rango 8, por tanto:  $\dim(C^0) = \text{rang}(d^0) + \dim(\ker(d^0)) \Rightarrow \dim(\ker(d^0)) = 16 - 8 = 8 \Rightarrow \ker(d^0) = \mathbb{R}^8 \Rightarrow H^0(X) = \mathbb{R}^8$ . Esto supone que toda la información local se expone globalmente mediante ocho parámetros. Por otro lado,

tenemos que:

$$H^1(X) = \frac{\ker(d^1)}{\operatorname{im}(d^0)} = \frac{\mathbb{R}^8}{\mathbb{R}^8} = \{0\}.$$

Esto va a suponer que nuestro haz es flácido (o *flasque*, véase [2]) y por lo tanto toda la información local ha pasado al cómputo global sin perderse ningún dato.

### Análisis de la robustez del sistema

Suponemos ahora un fallo en los sensores tipo  $K$  de modo que dejan de transmitir datos de estatus. Mostramos la nueva información en la Tabla 3.

Sensor	$e$	$c$	$d$	$s$
$R$	no	sí	sí	sí
$G$	no	sí	no	no
$K$	fuera de servicio	no	sí	no
$I$	sí	no	no	sí

Tabla 3: Nueva relación de sensores.

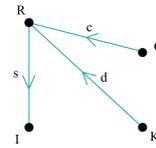


Figura 4: Nuevo grafo asociado.

Hacemos de nuevo la construcción del complejo simplicial regular en la Figura 4 y del haz celular, y el cálculo de su cohomología. En este caso el resultado es:  $\operatorname{rang}(d^0) = 7 \Rightarrow \dim \ker(d^0) = 9 \Rightarrow H^0(X) = \mathbb{R}^9$ . De esta información extraemos, por una parte, que ahora los nodos esenciales son  $K$ ,  $G$  e  $I$ , y que además hay dos medidas que no se están integrando bien en la información global. Por otro lado,  $\ker(d^1) = C^1 = F(c) \oplus F(s) \oplus F(d) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^7$ , así que se tiene:

$$H^1 = \frac{\ker(d^1)}{\operatorname{im}(d^0)} = \frac{\mathbb{R}^7}{\mathbb{R}^7}.$$

Del estudio del sistema mediante cohomología de haces concluimos que el fallo de una serie concreta de sensores tipo  $K$  no produce una pérdida de datos en el control global de la aeronave, por lo que, a pesar del fallo, es razonable seguir trabajando en el aeropuerto con normalidad.

### Bibliografía

- [1] Curry, J. (2019). *Sheaves, cosheaves and applications*, Tesis doctoral, University of Pennsylvania. arXiv:1303.3255.
- [2] Leinster, T. (2014). *Basic category theory*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] Mansourbeigi, S. (2017). *Sheaf Theory Approach to Distributed Applications: Analysing Heterogeneous Data in Air Traffic Monitoring*, International Journal of Data Science and Analysis, **3**(5), pp. 34–39.

## Formación de singularidades en las ecuaciones de Euler de fluidos

Área de Análisis Matemático

Antonio Álvarez López

Universidade de Santiago de Compostela

7 de abril de 2021

### Introducción

Se define un fluido como un medio continuo incapaz de resistir esfuerzos cortantes, es decir, es una distribución continua de partículas que se puede deformar sin que aparezcan fuerzas que intenten recuperar su forma original. Es por ello que un fluido no tiene una forma definida y se adapta a la del recipiente que lo contiene, en caso de que haya uno.

En este documento se presentarán y analizarán en  $\mathbb{R}^3$  las ecuaciones de Navier-Stokes, que rigen el movimiento de los fluidos, así como las de Euler para fluidos incompresibles, que son una versión simplificada de las anteriores. Se planteará el problema del milenio formulado para las ecuaciones de Navier-Stokes y la versión correspondiente para las de Euler, profundamente relacionada con la existencia de singularidades en el campo de vorticidades. Este campo se estudia a través de la ecuación de la vorticidad, que analizaremos con detalle centrándonos en los efectos de los distintos términos y sus interacciones. Para ello, introducimos varios modelos unidimensionales y presentamos algunos resultados que permiten intuir su comportamiento en relación a la existencia de singularidades.

### Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes modelan el movimiento de todos los fluidos. En  $\mathbb{R}^n$ , se trata de un sistema de  $n + 1$  ecuaciones en derivadas parciales con  $n + 1$  incógnitas, que son el campo vectorial de velocidades del fluido  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , que tiene  $n$  componentes, y el campo escalar de presiones  $p(\mathbf{x}, t)$ .

Las primeras  $n$  ecuaciones proceden de la segunda ley de Newton o ley de conservación de la cantidad de movimiento, que establece que las aceleraciones que experimenta un cuerpo son proporcionales a las fuerzas que recibe, siendo la masa del cuerpo la constante de proporcionalidad. A continuación mostraremos la expresión, que analizaremos término a término:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{u}. \quad (1)$$

El lado izquierdo de la igualdad es el producto de la densidad  $\rho$  por la derivada material del campo de velocidades. La *derivada material* o *derivada de Lagrange* de una propiedad  $f$  en un fluido con campo de velocidades  $\mathbf{u}$  se escribe como

$$\frac{Df}{Dt} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) f \right).$$

Este operador describe la variación temporal del valor que toma  $f$  en una partícula determinada del fluido a medida que esta fluye por su trayectoria. El primer sumando representa la variación temporal de  $f$  en cada punto del espacio de manera estática e independiente del fluido (derivada de Euler), mientras que el segundo sumando representa la variación de  $f$  debido a su transporte por el flujo, efecto conocido como advección (o convección, para un campo vectorial). Un ejemplo ilustrativo de este operador es una partícula que se desplaza a lo largo de un río y experimenta cambios en su temperatura. Esta puede variar tanto por el calentamiento según avanza el día como por moverse por zonas del río que están al sol o a la sombra.

El primer término del lado derecho de la ecuación (1) es el opuesto del gradiente del campo de presiones, por lo que se trata de una fuerza que está dirigida desde los puntos del fluido sometidos a una mayor presión interna hacia los de menor presión. Se puede interpretar que el campo de presiones tiende a homogeneizarse en el fluido.

El segundo término del lado derecho de (1) es el producto de la densidad y la resultante de las aceleraciones externas que se ejercen sobre el fluido. Esta suele tratarse del campo gravitatorio y por ello se emplea la letra  $\mathbf{g}$  para denotarla. Finalmente, el último término es el producto del coeficiente de viscosidad  $\nu$  y el laplaciano del campo  $\mathbf{u}$ . Este representa las fuerzas viscosas de rozamiento interno del fluido, que suponen una resistencia al movimiento de las partículas. El coeficiente de viscosidad  $\nu$ , que es mayor o igual que cero, establece el peso que tienen dichas fuerzas en la dinámica del fluido.

La otra ecuación del sistema de Navier-Stokes es la que impone la conservación de la masa, y se conoce como ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

Si suponemos que el fluido es estacionario ( $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ) y homogéneo ( $\nabla \rho = 0$ ), entonces la densidad  $\rho$  será constante en todo punto del fluido y para todo instante de tiempo y la ecuación de continuidad se simplificará a la ecuación de incompresibilidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

El significado físico de esta ecuación se puede deducir usando el Teorema de la Divergencia: el flujo a través de cualquier superficie cerrada será nulo, esto es, los volúmenes de fluido se conservan y el fluido no se puede comprimir o expandir. Además de las anteriores ecuaciones, se deben imponer unas condiciones iniciales

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x). \quad (3)$$

Para facilitar la comprensión del texto recordamos las definiciones de los conceptos del espacio de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  y del espacio de Sobolev  $H^s(\mathbb{R}^3)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathbb{R}^3) &= \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^3 : \|f\|_{\alpha, \beta} < \infty\} \\ H^s(\mathbb{R}^3) &= \{f \in L^2(\mathbb{R}^3) \mid D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^3), \forall \alpha \in \mathbb{N}^3 : |\alpha| = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \leq s\} \subset L^2(\mathbb{R}^3),\end{aligned}$$

donde  $\|f\|_{\alpha, \beta} = \|x^\alpha D^\beta f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} D^\beta f(x)|$  y  $D^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \partial_{x_3}^{\alpha_3} f$  es la notación multi-índice para las derivadas parciales.

Ahora, estamos en condiciones de enunciar el problema del milenio: Si  $\mathbf{u}_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  con  $\mathbf{g} = 0$ , ¿existen  $\mathbf{u}, p \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$  cumpliendo  $\mathbf{u}(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3) \forall t \in [0, \infty)$  y verificando (1), (2) y (3)?

En otras palabras, para un campo inicial de velocidades diferenciable  $C^\infty$  y de decrecimiento rápido en  $\mathbb{R}^3$  tanto él como sus derivadas (es decir, que sea físicamente admisible), en las soluciones, que deben ser de cuadrado integrable en  $\mathbb{R}^3$  (esto es, con energía finita), ¿se conserva la regularidad, o por el contrario hay una pérdida repentina de regularidad en algún instante finito  $T > 0$ ? Esta singularidad significa un fallo del modelo físico para predecir el comportamiento del fluido, y se debe a la aparición de turbulencias. Por tanto, la pregunta es si en un flujo en el que las partículas siguen trayectorias regulares y se mueven en capas paralelas, conocido como flujo laminar, este estado es permanente o por el contrario pueden aparecer turbulencias, esto es, trayectorias irregulares, caóticas e impredecibles. Este problema, como veremos, se ha podido resolver en dos dimensiones resultando que la regularidad se conserva, pero el caso tridimensional todavía está abierto tras varios siglos, lo que muestra su enorme dificultad. De hecho, está considerado el último problema no resuelto de la física matemática clásica.

## Ecuaciones de Euler de fluidos incompresibles

Por simplicidad, consideremos la densidad  $\rho = 1$ , lo cual se puede hacer simplemente redefiniendo la unidad de masa. Las ecuaciones de Euler de fluidos incompresibles se obtienen a partir de las de Navier-Stokes tomando  $\nu = 0$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x). \end{cases} \quad (4)$$

La ausencia del término de viscosidad facilita el estudio de esta ecuación y, a priori, tiene una mayor probabilidad de generar singularidades en las soluciones debido al efecto regularizador asociado a ese término. No obstante, las soluciones también son extremadamente inestables, lo que dificulta su análisis computacional.

Existe un resultado importante (véase [1]) que facilita el estudio del problema para las ecuaciones de Euler incompresibles y que se conoce como el criterio de Beale-Kato-Majda. Este resultado establece que, para  $T_0 > 0$  y  $s \geq 3$ , si una solución regular de la ecuación de Euler  $\mathbf{u} \in C([0, T_0]; H^s(\mathbb{R}^3))$ , pierde su regularidad

en un instante  $T > 0$ , entonces se verifica que  $\int_0^T \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |\boldsymbol{\omega}(x, t)| dt = \infty$ , donde  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  es el campo de vorticidades del fluido. En particular, se tendrá que  $\boldsymbol{\omega}$  es no acotada en  $\mathbb{R}^3$  en el instante  $T$  y se dice que tiene un blow-up de tiempo finito.

Especialmente útil para el estudio de las singularidades es el contrarrecíproco del resultado, ya que permite asegurar que la solución se podrá extender con regularidad en el tiempo mientras la vorticidad permanezca acotada.

## Estudio de la vorticidad y modelos unidimensionales

### Ecuación de la vorticidad

El criterio de Beale-Kato-Majda desvela una conexión entre la aparición de turbulencias en el fluido y su vorticidad, de ahí la motivación para introducir este campo en las ecuaciones. Para ello, aplicamos el operador rotacional en (4), de manera que se anulan el término del campo de presiones y el de las fuerzas externas, si estas son conservativas (como lo es el campo gravitatorio). Así, obtenemos el siguiente sistema, equivalente en  $\mathbb{R}^3$  a las ecuaciones de Euler por ser  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}, \\ \mathbf{u} = \nabla \times (-\Delta)^{-1} \boldsymbol{\omega}, \\ \boldsymbol{\omega}(x, 0) = \boldsymbol{\omega}_0(x). \end{cases}$$

La dinámica de las soluciones de estas ecuaciones se guía por algunos efectos como la no localidad, el transporte y el estiramiento de vórtices. La no localidad se origina en la segunda ecuación, conocida como Ley de Biot-Savart, debido al término  $(-\Delta)^{-1}$ . Físicamente, indica que cualquier perturbación tiene efecto sobre todo el fluido. El transporte de vórtices significa que los vórtices se ven arrastrados en el espacio por el campo de velocidades que ellos mismos generan, y se produce por el término  $\mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}$ . Por último, el estiramiento de vórtices se refiere al proceso por el que estos varían en magnitud debido a las variaciones en el gradiente de velocidades en la dirección del vórtice, expresadas a través de la derivada direccional  $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}$ . Este término resulta ser la principal fuente de singularidades, por lo que analizamos con detalle su comportamiento e interacción con el término de transporte.

Podemos descomponer la matriz jacobiana del campo de velocidades en su parte simétrica (matriz de deformación) y antisimétrica (matriz de rotación):  $\nabla \mathbf{u} = \mathcal{D}\mathbf{u} + \Omega\mathbf{u}$ , con  $\mathcal{D}\mathbf{u} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t}{2}$ ,  $\Omega\mathbf{u} = \frac{\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^t}{2}$ . Además, se cumple que, para cualquier  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\Omega\mathbf{u} \cdot \mathbf{h} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}}{2}$ , por lo que  $\boldsymbol{\omega} \in \text{Ker } \Omega\mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathcal{D}\mathbf{u}$ .

En consecuencia, podemos deducir que, en 2 dimensiones, como la vorticidad es perpendicular a la velocidad en todo punto, no hay estiramiento de vórtices y así este campo se conserva en las líneas de corriente sin formar singularidades. Sin embargo, en 3 dimensiones resulta que, cuando la vorticidad se alinea con un autovector de  $\mathcal{D}\mathbf{u}$ , crece o decrece según el signo del autovalor asociado.

El término de estiramiento de vórtices es cuadrático en  $\boldsymbol{\omega}$ , por lo que podemos plantear un modelo de juguete unidimensional de la forma  $\partial_t \omega = \omega^2$ , cuya solución

es  $\omega(t) = \frac{-1}{t+c}$ , con  $c \in \mathbb{R}$ , y que presenta una singularidad en  $t = -c$ .

### Modelo de Constantin-Lax-Majda

Este modelo, propuesto en 1985, abrió una línea de investigación que todavía se estudia hoy en día. Su fin es analizar en una dimensión el efecto del estiramiento de vórtices sobre las soluciones. Para ello, se tiene en cuenta que la matriz  $\mathcal{D}\mathbf{u}$  es un operador lineal integral que conmuta con la traslación y con núcleo de Schwartz singular y de valor medio nulo en  $\mathbb{S}^2$ . Solo existe un operador unidimensional con propiedades similares: la transformada de Hilbert, que se define como

$$H\omega(x) = \frac{1}{\pi} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega(y)}{x-y} dy.$$

Este es un operador lineal acotado en cada  $L^p(\mathbb{R})$  (para  $1 < p < \infty$ ), antiautoadjunto y que cumple  $H^{-1} = -H$ . De esto se deduce que es una isometría en  $L^p$ .

El modelo, que se estudia en [2], es el siguiente:

$$\begin{cases} \partial_t \omega = \omega H(\omega), \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x) \in H^1(\mathbb{R}), \end{cases} \quad (5)$$

y cuenta con la gran ventaja de poseer una solución explícita de la forma:

$$\omega(x, t) = \frac{4\omega_0(x)}{[2 - tH\omega_0(x)]^2 + t^2\omega_0^2(x)}, x \in \mathbb{R}.$$

Pese a su simplicidad, este modelo retiene muchas de las propiedades más importantes de la ecuación tridimensional y sus soluciones exhiben algunos de los fenómenos observados. En particular, existen condiciones iniciales regulares que dan lugar a la formación de singularidades. De hecho, se ha descubierto que una condición necesaria y suficiente para que haya un blow-up en un instante  $T_0 > 0$  es que exista  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\omega_0(x_0) = 0$  y  $H\omega_0(x_0) > 0$ . En tal caso,  $T_0 = \frac{2}{\sup\{H\omega_0(x) | \omega_0(x)=0\}}$ .

### Modelo de Okamoto-Sakajo-Wunsch/De Gregorio

Se trata de una familia uniparamétrica de modelos que tiene como objetivo introducir el término de transporte en el modelo (5) con un parámetro de peso que se varía para estudiar los efectos en las soluciones:

$$\begin{cases} \partial_t \omega + a u \partial_x \omega = \omega \partial_x u, \\ \partial_x u = H(\omega). \end{cases} \quad (6)$$

Se ha demostrado que si  $a < 0$  entonces ambos términos cooperan para formar una singularidad. En cambio, si  $a > 0$  los dos se contraponen y la existencia de blow-up dependerá del parámetro de peso y de la regularidad de la solución inicial. Así, el término de transporte tiene un efecto estabilizador frente al de estiramiento de vórtices. Lo ilustramos presentando un par de resultados que ayudan a comprender el carácter de las interacciones que pueden dar lugar a blow-ups de tiempo finito autosimilares (ver [1]). Para más información y demostraciones, ver [3].

## Resultados

**Teorema 1.** *Existe una constante absoluta  $a_0$  tal que, para cada  $a$  cumpliendo  $|a| < a_0$ , hay una función inicial impar  $\omega_0 = \omega_0^a \in H^3(\mathbb{R})$  que depende analíticamente de  $a$  y que explota en tiempo finito. Concretamente, para  $|a| < a_0$ , existe  $\lambda = \lambda(a)$  que depende analíticamente de  $a$  y con  $\lambda(0) = 0$ , tal que la única solución local de (6) con función inicial  $\omega_0 := \omega_0^a$  en  $C([0, 1]; H^3(\mathbb{R}))$  viene dada por:*

$$\omega(t, x) = \frac{1}{1-t} \omega_0 \left( \frac{x}{(1-t)^{1+\lambda}} \right),$$

que explota en  $t = 1$ .

Para  $\alpha \in (0, 1)$ , se define el espacio de funciones Hölder-continuas  $C^\alpha(\mathbb{R})$  como las que cumplen  $\|f\|_{C^\alpha} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty$ . Un ejemplo es  $f(z) = k(|z|^\alpha)$ , con  $k \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

**Teorema 2.** *Existe una constante absoluta  $c_0 > 0$  tal que, para  $\alpha \in \{1/n, n \in \mathbb{N}\}$  y  $|a| < c_0/\alpha$ , existe un parámetro  $\lambda^{(\alpha)}(a)$  cumpliendo  $\lambda^{(\alpha)}(0) = 0$  y  $\lambda^{(\alpha)}(a) > -2$ , y una función inicial impar  $\omega_0^{(\alpha)}(a) \in L^{p, \infty} \cap C^\alpha(\mathbb{R})$ , para  $p = \frac{1+\lambda^{(\alpha)}(a)}{\alpha}$ , que explota en tiempo finito. Concretamente, la única solución local de (6) para una función inicial  $\omega_0$  en  $C([0, T]; C^\alpha(\mathbb{R}))$  viene dada por:*

$$\omega(t, x) = \frac{1}{1-t} \omega_0^\alpha \left( \frac{x}{(1-t)^{\frac{1+\lambda^{(\alpha)}(a)}{\alpha}}} \right),$$

que explota en  $t = 1$ .

El primer teorema establece que si el parámetro de peso es suficientemente pequeño, habrá un blow-up en tiempo finito con la forma dada. Por otra parte, el segundo teorema afirma que el blow-up puede existir para cualquier peso si se disminuye de manera inversamente proporcional la regularidad de la condición inicial.

## Bibliografía

- [1] Sperone Martí, G. S. (2016). *Singularidades en tiempo finito de soluciones de la ecuación de Euler y de Navier-Stokes en tres dimensiones espaciales*, Memoria de ingeniería, Universidad de Chile.
- [2] Constantin P., Lax P. D. y Majda A. (1985). *A simple one-dimensional model for the three-dimensional vorticity equation*, Communications on Pure and Applied Mathematics, **38**, pp. 715–724.
- [3] Elgindi, T. M. y Jeong, I. J. (2020). *On the Effects of Advection and Vortex Stretching*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **235**, pp. 1763–1817.

## Recíproco del Teorema Egregium

Área de Geometría y Topología

José Miguel Balado Alves

Universidade de Santiago de Compostela

21 de abril de 2021

### Introducción

El conocido Teorema Egregium de Gauss, uno de los teoremas fundamentales de la Geometría Riemanniana, establece que la curvatura es un invariante de la métrica. Nosotros nos hacemos la pregunta inversa, ¿en qué sentido la curvatura determina la métrica?

Si bien recientes resultados dan una respuesta local a esta cuestión, nuestro objetivo es presentar una solución global. Nos apoyaremos en el estudio de la geometría conforme para determinar qué condiciones en la curvatura convierten un difeomorfismo entre variedades de Riemann en una isometría global.

### Elementos básicos de la geometría Riemanniana

Sea  $(M, g)$  una variedad de Riemann. A la aplicación  $R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  definida por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

que define un campo de tensores de tipo  $(1, 3)$ , la llamaremos *endomorfismo curvatura de Riemann*.

Dado  $\Pi$  un subespacio 2-dimensional de  $T_p M$ , y  $\{X, Y\}$  una base de  $\Pi$ , definimos la *curvatura seccional  $K$  asociada a  $\Pi$*  como

$$K_p(X, Y) = \frac{R_p(X, Y, Y, X)}{g_p(X, X)g_p(Y, Y) - g_p(X, Y)^2}.$$

Los puntos de  $M$  en los que la curvatura seccional  $K$  sea constante reciben el nombre de *puntos isotrópicos*. Nos referiremos al resto de puntos como *no isotrópicos*.

Debido a que no siempre es fácil trabajar con tensores de tipo  $(1, 3)$ , es conveniente construir tensores más simples que guarden parte de la información que nos aporta el tensor de curvatura. Para ello construimos el *tensor de Ricci*, que denotaremos por  $\rho$ , como el tensor de tipo  $(0, 2)$  resultante de contraer el endomorfismo de curvatura  $R$  en el primer y último índice, es decir:

$$\rho(X, Y) = (C_4^1 R)(X, Y).$$

Al tensor  $(1, 1)$ ,  $\text{Ric}$ , que verifica  $g(\text{Ric}(X), Y) = \rho(X, Y)$ , nos referiremos como *operador de Ricci*. La curvatura escalar,  $\tau$ , es la función definida como la traza del operador de Ricci:

$$\tau = \text{tr}_g \text{Ric}.$$

## Geometría conforme

Dos métricas de Riemann  $g$  y  $\tilde{g}$  sobre una misma variedad  $M$  se dicen *conformes* si existe una función diferenciable  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$ .

Para estudiar la relación entre métrica y curvatura, nos conviene construir un tensor que permanezca invariante por transformaciones conformes: definimos el *tensor de Weyl* como el siguiente tensor tipo  $(0, 4)$ :

$$W = R - \frac{1}{n-2}\rho \odot g - \frac{\tau}{2(n-2)(n-1)}g \odot g,$$

donde  $\rho$  denota el tensor de Ricci  $(0, 2)$ ,  $\tau$  la curvatura escalar y  $\odot$  el producto de Kulkarni-Nomizu definido como:

$$\begin{aligned} h \odot k(X, Y, Z, T) = & h(X, T)k(Y, Z) + h(Y, Z)k(X, T) \\ & - h(X, Z)k(Y, T) - h(Y, T)k(X, Z), \end{aligned}$$

con  $X, Y, Z, T$  campos de vectores sobre  $M$  y  $h$  y  $k$  tensores simétricos de tipo  $(0, 2)$ .

**Proposición 1.** *Sea  $(M, g)$  una variedad de Riemann de dimensión  $n$ , y sea  $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$  una métrica conforme a  $g$ . Si  $\nabla$  y  $\tilde{\nabla}$ ,  $R$  y  $\tilde{R}$ ,  $W$  y  $\tilde{W}$  denotan las conexiones de Levi-Civita, tensor de curvatura y tensor de Weyl de  $g$  y  $\tilde{g}$  respectivamente, entonces:*

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + (X\varphi)Y + (Y\varphi)X - g(X, Y)\nabla\varphi, \\ \tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + H_\varphi(X, Z)Y - H_\varphi(Y, Z)X \\ &\quad + g(X, Z)h_\varphi(Y) - g(Y, Z)h_\varphi(X) \\ &\quad + (Y\varphi)(Z\varphi)X - (X\varphi)(Z\varphi)Y \\ &\quad - \|\nabla\varphi\|^2\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\ &\quad + \{(X\varphi)g(Y, Z) - (Y\varphi)g(X, Z)\}\nabla\varphi, \\ \tilde{W}(X, Y, Z, T) &= e^{2\varphi}W(X, Y, Z, T), \end{aligned}$$

donde  $\nabla\varphi$  denota el gradiente de  $\varphi$ ,  $H_\varphi$  el hessiano de  $\varphi$  de tipo  $(0, 2)$  y  $h_\varphi$  el tensor de tipo  $(1, 1)$  inducido por  $H_\varphi$ .

Una variedad de Riemann  $(M, g)$  se dice *localmente conformemente llana* si para todo  $p \in M$  existe un entorno  $U$  de  $p$  y una función diferenciable  $\varphi$  definida en  $U$  tal que  $(U, e^{2\varphi}g)$  es una variedad de Riemann llana, esto es, que su tensor de curvatura  $R$  es idénticamente nulo.

**Teorema 1.** *Sea  $(M, g)$  una variedad de Riemann de dimensión  $n \geq 4$ , entonces  $(M, g)$  es localmente conformemente llana si y solo si su tensor de Weyl es cero.*

## Difeomorfismos que preservan la curvatura

El Teorema Egregium de Gauss establece que la curvatura de Gauss es invariante por isometrías locales. Para estudiar en qué sentido la curvatura determina la métrica, intentamos resolver el siguiente problema: ¿cuándo variedades isocurvadas son globalmente isométricas?

**Definición 1.** Diremos que dos variedades de Riemann  $(M, g)$  y  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  son **isocurvadas** si existe un difeomorfismo  $f: (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  que preserva la curvatura seccional, esto es, que  $f^*\tilde{K} = K$ .

El siguiente resultado será de gran ayuda para el estudio de variedades isocurvadas.

**Proposición 2** ([2, Theorem 1]). Sea  $f: M \rightarrow \tilde{M}$  un difeomorfismo que preserva la curvatura seccional entre dos variedades de Riemann de dimensión  $n \geq 3$ . Entonces la métrica  $f^*\tilde{g}$  es conformemente equivalente a  $g$  en la clausura del conjunto de puntos no isotrópicos.

Basándonos entonces en la geometría de los cambios conformes y en las conclusiones del siguiente resultado, se demuestran dos teoremas que nos aportan hipótesis para el carácter globalmente isométrico de los difeomorfismos con los que estamos trabajando.

**Teorema 2.** Sea  $V$  un espacio vectorial dotado con dos productos escalares  $\langle \cdot, \cdot \rangle, \overline{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  y dos tensores de curvatura  $R, \tilde{R}$  tal que:

- (a)  $\overline{\langle \cdot, \cdot \rangle} = \lambda \langle \cdot, \cdot \rangle$  para  $\lambda \in \mathbb{R}$  positivo,
- (b)  $\tilde{K} = K$ .

Entonces el endomorfismo de curvatura  $(1, 3)$  verifica  $\tilde{R} = \lambda R$ . Además  $\tilde{\rho} = \lambda \rho$ ,  $\tilde{\text{Ric}} = \text{Ric}$ ,  $\tilde{\tau} = \tau$  y  $\tilde{W} = \lambda W$  donde  $W$  denota el tensor de Weyl de tipo  $(1, 3)$ .

**Teorema 3** ([2, Theorem 3]). Sean  $(M, g)$  y  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  variedades isocurvadas de dimensión  $n \geq 4$ . Si  $M$  no es localmente conformemente llana, entonces todo difeomorfismo que preserve la curvatura seccional es una isometría.

**Teorema 4** ([2, Theorem 4]). Sean  $(M, g), (\tilde{M}, \tilde{g})$  dos variedades de Riemann isocurvadas de dimensión  $n \geq 4$ . Si  $M$  es localmente conformemente llana y el conjunto de puntos no isotrópicos es denso en  $M$ , entonces todo difeomorfismo que preserve la curvatura seccional es una isometría.

La principal diferencia entre los casos no localmente conformemente llano y localmente conformemente llano, se debe a que la densidad de los puntos no isotrópicos en el primero se deduce de la invarianza del tensor de Weyl por transformaciones conformes. El problema reside en que cuando nuestra variedad es localmente conformemente llana el tensor de Weyl es idénticamente nulo y no aporta suficiente información.

## Resultado central

**Teorema 5** ([2, Fundamental Theorem]). Sean  $(M, g)$  y  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  variedades de Riemann de dimensión  $n \geq 4$  con curvatura seccional no constante y métrica analítica. Si  $f: (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  es un difeomorfismo que preserva la curvatura seccional, entonces  $f$  es una isometría.

El caso en que la curvatura seccional es constante es la única situación que debemos evitar, ya que en este caso la curvatura seccional no aporta suficiente información como para determinar la métrica.

Basta considerar las variedades  $(\mathbb{R}^n, g_0)$  y  $((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^n, i^*g_0)$ , donde  $g_0$  denota la métrica euclídea e  $i^*g_0$  la inducida en  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^n$ , y el difeomorfismo

$$f: \left( \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)^n, i^*g_0 \right) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, g_0)$$

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (\tan(x^1), \dots, \tan(x^n)).$$

Ambas variedades tienen curvatura seccional constante nula, por tanto  $f$  es un difeomorfismo que (trivialmente) preserva la curvatura seccional; no obstante, las variedades no son globalmente isométricas ( $(\mathbb{R}^n, g_0)$  es geodésicamente completa mientras que  $((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^n, i^*g_0)$  no lo es).

La analiticidad de la métrica nos garantiza entonces que, con que haya al menos un punto no isotrópico, un argumento mediante el Lema de Schur obliga a que el conjunto de puntos no isotrópicos sea denso en  $M$ , y como consecuencia de los Teoremas 3 y 4 se tendría el resultado.

Si intentáramos relajar el carácter analítico de la métrica, el resultado no sería cierto en general. Si  $g \in \mathcal{C}^4$ , ni siquiera se tendría el resultado de manera local. Tenemos garantizada la isometría sobre el conjunto de puntos no isotrópicos, y sobre los puntos isotrópicos una isometría local (no necesariamente por  $f$ ) gracias a la siguiente proposición.

**Proposición 3.** Sean  $(M, g)$  y  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  variedades de Riemann de la misma dimensión e igual curvatura seccional constante. Para cualesquiera puntos  $p \in M$  y  $\tilde{p} \in \tilde{M}$ , existen entornos  $U$  de  $p$  y  $\tilde{U}$  de  $\tilde{p}$  y una isometría  $\phi: U \rightarrow \tilde{U}$ .

No obstante si añadimos una cierta condición sobre la frontera del conjunto de puntos isotrópicos podemos solucionar el problema, como muestra el siguiente resultado.

**Teorema 6** ([2, Theorem 5]). Sea  $f: (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  un difeomorfismo que preserva la curvatura seccional entre variedades de Riemann de clase  $\mathcal{C}^4$ . Si para los puntos de la frontera del conjunto de puntos isotrópicos se verifica que existe un entorno  $U$  tal que su intersección con dicha frontera es una subvariedad totalmente geodésica, entonces  $M$  y  $\tilde{M}$  son localmente isométricas.

## Dimensiones inferiores

La mayor restricción en el trabajo de Kulkarni se encuentra en la dimensión de la variedad. Si nos preguntamos qué ocurre en dimensiones inferiores, el resultado no tiene por qué ser cierto en general.

### Dimensión 1

En el caso de que nuestra variedad tenga dimensión 1, la relación entre métrica y curvatura queda muy diferenciada debido al hecho de que toda variedad de Riemann 1-dimensional es llana.

### Dimensión 2

En dimensión 2, la curvatura seccional no aporta la suficiente información para determinar la métrica de manera general (en este caso es simplemente una función evaluada en  $M$ ). Existen muchos contraejemplos, en [3, p. 164] se muestra que la superficie de revolución de la curva logarítmica y el helicoides (derecho) son superficies isocurvadas en las hipótesis del Teorema 5 no isométricas.

### Dimensión 3

La situación de variedades de Riemann 3-dimensionales no está del todo clara. Shing-Tung Yau demostró que el resultado en dimensión 3 bajo las hipótesis del Teorema 5 no es cierto en general (ver [4, p. 125]).

No obstante, añadiendo ciertas condiciones el resultado sigue siendo cierto. El siguiente resultado nos da una caracterización de aquellos difeomorfismos entre variedades de Riemann de dimensión 3 que no son isometrías.

**Teorema 7** ([5][Theorem 2]). *Bajo las hipótesis del Teorema 5, una condición necesaria y suficiente para que  $f$  no sea una isometría es que la variedad  $(M, g)$  y la función  $\varphi$  asociada al cambio conforme,  $f^*\tilde{g} = e^{2\varphi}g$ , satisfagan las siguientes condiciones:*

1.  $(d\varphi)_p \neq 0$  para todo  $p \in M$ ,
2.  $M$  no tiene puntos isotrópicos,
3. el rango de  $\varphi$  es o positivo o negativo.

*Equivalentemente, si se satisfacen 1. y*

4.  $(d\tau)_p \neq 0$  para todo  $p \in M$ .

Como consecuencia del anterior teorema obtenemos los siguientes resultados de interés en el caso 3-dimensional.

**Corolario 1.** *Bajo las hipótesis del Teorema 5, si  $(M, g)$  es compacta entonces  $f$  es una isometría.*

**Corolario 2.** *Bajo las hipótesis del Teorema 5, si  $g$  y  $\tilde{g}$  son métricas completas, entonces si  $f$  es un difeomorfismo sobreyectivo y la curvatura escalar es no nula,  $f$  es una isometría.*

## Bibliografía

- [1] Lee, J. M. (2018). *Introduction to Riemannian Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, **176**. Springer, New York.
- [2] Kulkarni, R. S. (1970). *Curvature and metric*, Ann. of Math., pp. 311–331.
- [3] Kreyszig, E. (2019). *Introduction to differential geometry and Riemannian geometry*, University of Toronto Press, Toronto.
- [4] Yau, S. T. (1974). *Curvature preserving diffeomorphisms*, Ann. of Math., pp. 121–130.
- [5] Nasu, T. (1975). *Curvature and metric in Riemannian 3-manifolds*, J. Math. Soc. Japan, **27**(2), pp. 194–206.

## Optimización do circuíto de pacientes no hospital de día de oncoloxía de Santiago

Área de Estatística e Investigación Operativa

Adrián González Maestro

Universidade de Santiago de Compostela

17 de maio de 2021

O hospital de día de oncoloxía (HDO) é un servizo do Hospital Clínico Universitario de Santiago de Compostela (CHUS). Ten a función de proporcionar os tratamentos e coidados ambulatorios para os pacientes de cancro que, debido á situación na que se atopa a súa enfermidade, non precisan estar permanentemente hospitalizados. Desta forma, os pacientes atendidos neste centro atópanse polo xeral no seu domicilio, acudindo ao HDO unicamente cando teñen unha citación para algún compromiso médico.

O principal servizo prestado no HDO é o conformado polos tratamentos de quimioterapia. A maioría dos pacientes de cancro teñen asignado este tipo de tratamento, séndolles suministrado de forma periódica. Concretamente, ditos tratamentos poden darse en ciclos dunha sesión cada unha, dúas, tres ou seis semanas. Non obstante, o HDO tamén ofrece outros servizos médicos que o paciente debe recibir antes de poder comezar unha sesión de quimioterapia. Así, un paciente deste centro segue un circuíto coma o que describimos a continuación. Primeiro rexístrase a súa chegada e realízase unha analítica. Cando os resultados da análise están listos, un oncólogo certifica que estes son correctos e ten unha revisión co paciente. Se todo o relacionado coa súa saúde está en orde, pídeselle á sección de farmacia a preparación das substancias da quimioterapia do paciente. Cando ditas substancias están listas, lévase ao paciente a un dos sillóns de infusión (no caso de que haxa un libre) e comeza o tratamento. Cando o proceso remata o paciente deixa o sillón e abandona o centro. Na Figura 1 ilustramos o esquema do circuíto que seguen os pacientes dende a súa chegada ata que reciben o tratamento.

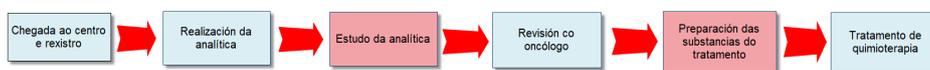


Figura 1: Circuíto dos pacientes.

A análise de sangue e a preparación das substancias do tratamento son as dúas etapas do proceso que non requiren interacción co paciente, e polo tanto este debe agardar á súa finalización na sala de espera. En base a datos tomados durante unha

---

PALABRAS CLAVE: problema de planificación; quimioterapia ambulatoria; programación multiobxectivo.

semana de traballo no HDO concluímos que a primeira destas etapas de espera é bastante estable na súa duración, prolongándose ao redor de 50 minutos. Non obstante, a segunda etapa de agarda presenta un tempo medio estimado de dúas horas e unha gran variabilidade entre os datos recollidos, o cal se traduce en que esta espera é considerablemente máis longa (en promedio) e moito máis impredecible.

Por outro lado, cada paciente ten asignada unha hora para a realización da analítica e para a revisión oncolóxica, pero non dispón dunha estimación sobra a hora na que recibirá o seu tratamento de quimioterapia. En consecuencia, a incerteza de non saber en que momento será chamado para comezar o seu tratamento provoca que o paciente estea obrigado a pasar esa segunda etapa de agarda na sala de espera do hospital.

Pola contra, si que dispoñemos dunha estimación bastante precisa de canto vai durar o tratamento de quimioterapia de cada paciente. Polo tanto a priori temos, para cada paciente, a información de cando comezará en teoría a súa revisión oncolóxica e canto durará o seu tratamento de quimioterapia. En consecuencia, plantexámonos facer uso de ferramentas de optimización para deseñar un algoritmo que, partindo desa información, estableza uns horarios para os tratamentos de quimioterapia de cada paciente intentando minimizar os tempos de espera entre as finalizacións das revisións oncolóxicas e os comezos dos tratamentos.

O principal problema ao que nos enfrontamos é o feito de que, para cada paciente, descoñecemos canto se vai retrasar o comezo da revisión oncolóxica, canto vai durar dita revisión e canto se vai demorar a preparación dos fármacos da quimioterapia. A suma destes tres tempos representa canto deberemos agardar dende o comezo teórico da revisión oncolóxica ata alcanzar o momento a partir do cal o paciente podería comezar o seu tratamento de quimioterapia. Ditos tempos proceden de variables das cales en principio descoñecemos a distribución.

Durante unha semana de xaneiro de 2021 recollimos datos dos pacientes que acudían ao HDO, incluíndo as tres variables anteriormente mencionadas. O noso obxectivo é analizar a distribución dos datos recollidos e establecer unha cantidade de minutos que represente unha cota superior para a suma de ditas variables nunha porcentaxe razoablemente alta dos pacientes. Así, partindo da hora de comezo teórica da revisión oncolóxica de cada paciente, poderíamos establecer un momento a partir do cal estimamos que poderá comezar o seu tratamento.

Os datos recollidos amosan que as medias do retraso do comezo da revisión oncolóxica, a duración desta e a duración da preparación do tratamento son aproximadamente media hora, media hora e unha hora, respectivamente. En consecuencia, a espera media dende que remata a revisión co oncólogo ata o momento no que sería factible comezar a sesión de quimioterapia é, como xa mencionamos antes, de dúas horas. Por outra parte, cabe resaltar que todas as variables presentan unha certa variabilidade que resultará bastante prexudicial á hora de seleccionar unha cota, sobre todo no caso da preparación dos fármacos da quimioterapia, onde a diferenza entre o terceiro e o primeiro cuartil supera os 40 minutos. Isto provocará que, de cara a aplicar o modelo que definamos, teñamos que escoller unha cota superior para o valor da suma destas tres variables sensiblemente maior que a suma da media de

cada unha delas.

Tras analizar os datos en detalle, escollemos traballar con catro posibles cotas: 210, 180, 150 e 120 minutos. A cota de 210 minutos é resultado de considerar 60 minutos de marxe para o retraso da revisión oncolóxica, 60 para a duración desta e 90 para a preparación dos fármacos. A de 180 considera 45, 45 e 90 minutos respectivamente. A de 150 considera 30, 30 e 90 minutos respectivamente. Finalmente, a de 120 considera 15, 15 e 90 minutos respectivamente. As dúas primeiras cotas son bastante realistas, sendo a primeira máis conservadora e quizais máis apropiada para días dun maior volume de pacientes (e polo tanto con máis posibilidade de retrasos). As dúas últimas cotas son probablemente demasiado optimistas para ser aplicadas nas circunstancias actuais do hospital, pero servirannos de referencia para facernos unha idea de que podería chegar a conseguir o algoritmo que imos definir se o hospital puidese recortar dalgunha forma os tempos destas variables.

Agora que xa temos unha forma de estimar a partir de que hora un paciente poderá comezar o seu tratamento de quimioterapia, podemos intentar deseñar un esquema horario para todos os tratamentos dunha xornada de forma que se minimize a espera total do conxunto de pacientes durante a segunda etapa de agarda. Para levar a cabo tal proceso de optimización primeiro debemos describir as restricións que temos que respetar. En primeiro lugar, o horario laboral no HDO comeza ás 8:00 e remata ás 22:00, o cal quere dicir que todo tratamento debe comezar despois das 8:00 e rematar antes das 22:00. Por outro lado, o hospital dispón de 5 enfermeiros na sala de quimioterapia de 8:00 a 10:00, 6 de 10:00 a 15:00, 3 de 15:00 a 17:00 e 2 de 17:00 a 22:00. A capacidade de traballo de cada un deses enfermeiros tradúcese na posibilidade de inicializar un novo tratamento de quimioterapia cada 15 minutos e vixiar simultaneamente ata 16 tratamentos en curso (ningún tratamento pode levarse a cabo sen un enfermeiro pendente da súa correcta evolución durante a duración do mesmo). Na sala de quimioterapia existen 40 sillóns destinados a levar a cabo os tratamentos, o cal supón unha cota superior para o número de tratamentos que poden levarse a cabo simultaneamente.

Xa temos as restricións que o algoritmo debe cumprir. Agora, antes de formular un modelo matemático precisamos discretizar as 14 horas de traballo dunha xornada laboral do HDO nunha certa cantidade de intervalos finitos de tempo. Facer isto representa unha perda de precisión á hora de traballar co parámetro tempo, e canto máis grandes sexan eses intervalos peor será a solución obtida. Non obstante, tampouco poden ser excesivamente pequenos, pois nese caso non serían prácticos de cara a crear un esquema organizativo con eles, dado que presuporían unha puntualidade das distintas etapas do proceso que en xeral non se cumpriría. Decidimos que unha amplitude de 5 minutos é un bo compromiso entre precisión e manexabilidade dos intervalos. Polo tanto dividimos as 14 horas da xornada laboral en 168 intervalos de 5 minutos.

Con toda esta información xa estamos en disposición de formalizar un problema de programación matemática que modele e solvete esta situación. Para iso inspiráronos no algoritmo descrito en [1]. Nese traballo afróntase tamén un problema de planificación nun ámbito de quimioterapia ambulatoria e plantéxase un modelo no

cal algunhas restricións son similares ás que atopamos nós no HDO. A continuación describimos os parámetros que formarán parte do noso modelo.

**Parámetros:**

- $P$ : determina o número de pacientes que teñen asignado un tratamento de quimioterapia durante a xornada de traballo.
- $l_p$  con  $p \in \{1, \dots, P\}$ : recolle a duración dos tratamentos de quimioterapia de cada paciente.
- $r_p$  con  $p \in \{1, \dots, P\}$ : recolle, para cada paciente, o intervalo de tempo a partir do cal o tratamento de quimioterapia podería comezar.
- $Ndisp_t$  con  $t \in \{1, \dots, 168\}$ : denota o número de enfermeiros dispoñibles na sala de quimioterapia durante cada intervalo de tempo.

Cabe mencionar que, tendo en conta o exposto anteriormente sobre as cotas de tempo para o período comprendido entre a finalización da revisión oncolóxica e o momento no que os fármacos están listos para a terapia, a coordenada  $i$ -ésima do parámetro  $r_p$  obtense tomando a hora teórica do comezo da revisión do paciente  $i$ -ésimo e sumándolle a cota considerada.

**Variables:**

- $x_{i,t}$  con  $i \in \{1, \dots, P\}$  e  $t \in \{1, \dots, 168\}$ : variable binaria que toma o valor 1 se o paciente  $i$  comeza o seu tratamento no período horario  $t$ .
- $C_{max}$ : variable enteira que determina a partir de que franxa horaria non se levarán a cabo máis tratamentos.
- $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ : variables reais que toman valores en  $[0, 1]$ , cumprindo que  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . Usaranse para ponderar os dous sumandos que conformarán a función obxectivo.

Agora que xa coñecemos os parámetros e variables do problema, procedemos a formalizar un modelado matemático para esta situación:

$$\text{minimizar} \quad \lambda_1 \cdot \sum_{p=1}^P \sum_{t=1}^T [(t-1-r_p) \cdot x_{p,t}] + \lambda_2 \cdot C_{max}$$

suxeito a

$$\sum_{t=1}^{168} x_{p,t} = 1, \quad \forall p \in \{1, \dots, P\} \quad (1)$$

$$\sum_{t=1}^{r_p} x_{p,t} = 0 \text{ sempre que } r_p > 0, \quad \forall p \in \{1, \dots, P\} \quad (2)$$

$$C_{max} \leq 168, \quad (3)$$

$$\sum_{t=1}^{168} (t + l_p - 1) \cdot x_{p,t} \leq C_{max}, \quad \forall p \in \{1, \dots, P\} \quad (4)$$

$$\sum_{p=1}^P \sum_{a=\max\{1, t-l_p+1\}}^t x_{p,a} \leq 40, \quad \forall t \in \{1, \dots, 168\} \quad (5)$$

$$\sum_{p=1}^P \sum_{a=t}^{t+2} x_{p,a} \leq 5, \quad \forall t \in \{1, \dots, 24\} \quad (6.1)$$

$$\sum_{p=1}^P \sum_{a=t}^{t+2} x_{p,a} \leq 6, \quad \forall t \in \{25, \dots, 84\} \quad (6.2)$$

$$\sum_{p=1}^P \sum_{a=t}^{t+2} x_{p,a} \leq 3, \quad \forall t \in \{85, \dots, 108\} \quad (6.3)$$

$$\sum_{p=1}^P \sum_{a=t}^{t+2} x_{p,a} \leq 2, \quad \forall t \in \{109, \dots, 165\} \quad (6.4)$$

$$\sum_{p=1}^P \left[ \sum_{a=\max\{1, t-l_p+1\}}^t x_{p,a} \right] \leq 16 \cdot Ndisp_t, \quad \forall t \in \{1, \dots, 168\} \quad (7)$$

Como xa mencionamos anteriormente, a función obxectivo está conformada por dous sumandos ponderados mediante  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . O primeiro deles expresa a suma total de intervalos existentes, para cada un dos pacientes, entre o momento no que comezou o tratamento e o momento a partir do cal podería ter comezado. Minimizar este sumando implica, polo tanto, minimizar a suma total dos tempos de agarda do conxunto de pacientes durante a segunda etapa de espera. Por outra parte, o outro sumando está composto unicamente pola variable  $C_{max}$ . En consecuencia, minimizar este sumando implica buscar un esquema horario que dea por rematada a derradeira sesión de quimioterapia o antes posible. Isto pode ser útil de cara a dotar aos profesionais do HDO dunha certa marxe horaria fronte a posibles imprevistos que poidan dilatar a xornada laboral. Se ben isto último é un efecto desexable no esquema horario buscado, o interese do centro é priorizar a redución das esperas dos pacientes. Consecuentemente, polo xeral a ponderación entre os dous sumandos da función obxectivo farase escollendo  $\lambda_1$  maior que  $\lambda_2$ .

Con respecto ao conxunto das restricións, (1) asegura que por cada paciente asígnase un único tratamento. A restrición (2) garante que ningún tratamento sexa programado antes de que o paciente en cuestión estea en posición de recibilo. A restrición (3) asegura que a variable  $C_{max}$  toma un valor que representa unha franxa horaria que non excede as 22:00 (momento de peche do HDO). (4) garante que todos os tratamentos rematen como moi tarde na hora marcada polo valor que tome a variable  $C_{max}$ . Impoñemos a restrición (5) para evitar que nalgún momento o número de sillóns do hospital se vexa superado polo número de tratamentos en curso. As restricións (6.1), (6.2), (6.3) e (6.4) conforman un bloque cuxa función é a

de garantir que ao longo de toda a xornada laboral ningún enfermeiro iniciará máis dun tratamento nun lapso de 15 minutos. Por último, a finalidade de (7) é impedir que en ningún momento haxa en curso máis de 16 tratamentos por cada enfermeiro dispoñible na sala nese momento.

Deseguido amosamos a Táboa 1, onde se comparan os resultados do modelo (tomando  $\lambda_1 = 0.9$  e  $\lambda_2 = 0.1$ ) cos do procedemento actual no hospital.

	<i>Actualmente</i>	<i>Modelo1</i>	<i>Modelo2</i>	<i>Modelo3</i>	<i>Modelo4</i>	<i>Pacientes</i>
<b>Luns</b>	7.339	9.255	7.900	6.250	4.600	56
<b>Martes</b>	10.382	13.375	11.675	9.275	7.115	72
<b>Mércores</b>	7.351	9.790	8.190	6.360	4.480	61
<b>Xoves</b>	5.906	7.790	6.360	4.860	3.360	50
<b>Venres</b>	5.810	8.075	6.615	5.085	3.555	51
<b>Total</b>	36.788	48.285	40.740	31.830	23.110	290

Táboa 1: Minutos de espera nos distintos escenarios.

A primeira columna recolle os minutos de agarda totais aos que foron sometidos os pacientes durante a semana na que tomamos datos para este estudo. As seguintes columnas expresan os tempos de agarda que se darían utilizando o modelo con algunha das cotas mencionadas anteriormente. O *Modelo1* correspóndese coa cota de 210 minutos, o *Modelo2* coa de 180 minutos, o *Modelo3* coa de 150 minutos e o *Modelo4* coa de 120 minutos. Observamos que coa cota máis conservadora os tempos de espera aumentan sensiblemente. Pola contra, tomando 180 minutos de marxe empeórase en promedio algo menos dun cuarto de hora por paciente en cada visita ao hospital. Tendo en conta que a espera media co procedemento actual supera as dúas horas de duración, parece un bo prezo a pagar a cambio de coñecer unha estimación da hora do comezo do tratamento do paciente, o cal lle dá a este a posibilidade de abandonar o edificio durante a espera. Por outro lado, e partindo da cota de 180 minutos como unha cantidade realista, os resultados asociados ás cotas de 150 e 120 minutos dannos unha referencia das melloras que o hospital podería acadar en canto a tempos de espera se conseguise reducir dalgunha forma a duración dos procesos intermedios entre a revisión oncolóxica e a quimioterapia en 30 e 60 minutos (ou se conseguise reducir a varianza mantendo unha duración media similar á actual). Concretamente, conseguindo unhas circunstancias propicias para aplicar a cota dos 120 minutos conseguiríase reducir os tempos de agarda en máis dun 35 % en promedio.

## Bibliografía

- [1] Hesaraki, A. F., Dellaert, N. P. e Kok, T. (2019). *Generating outpatient chemotherapy appointment templates with balanced flowtime and makespan*, European Journal of Operational Research, **275**, pp. 304–318.

# Unha xornada de divulgación. “Matemáticas: habelas hainas, seguimos contándochas! 2020”

O xoves 26 de novembro de 2020 celebráronse as Xornadas *Matemáticas: habelas hainas, seguimos contándochas! 2020* dun xeito semipresencial, na Aula Magna da Facultade de Matemáticas e a través de Microsoft Teams. Este evento supón a cuarta edición destas xornadas de divulgación que continúan a afianzarse no ámbito da nosa facultade. A pesar da situación excepcional na que estabamos inmersos por mor da COVID-19, e das limitacións que isto supón, completouse o aforo da Aula Magna e destacou a elevada participación telemática.

Ditas xornadas, promovidas pola Comisión de Normalización Lingüística da Facultade de Matemáticas e organizadas polo Comité do SII co apoio económico do Servizo de Normalización Lingüística, buscan a normalización do galego no ámbito tanto das matemáticas coma da divulgación científica. Tendo en conta este obxectivo, a principal esencia das comunicacións orais consiste en amosar problemas ou aplicacións das matemáticas que están presentes ou relacionados coa investigación levada a cabo na nosa facultade.

Durante a xornada, tiveron lugar seis charlas de temática diversa, ademais dunha actuación musical por parte dos estudantes de grao Héctor González Vázquez e María Sánchez Cruz. As comunicacións, a cargo de doutorandos e investigadores novos, estaban asociadas a diferentes ramas das matemáticas, e representaban as distintas áreas de investigación presentes no noso centro.

As contribucións orais coas que se contou neste evento foron as seguintes:

- **“Existimos e... somos únicos?”**, por Jorge Rodríguez López.

A existencia e a unicidade de solución son cuestións recorrentes en multitude de problemas matemáticos e, se cadra, da vida mesma. Nesta charla centrámonos no estudo da existencia e, para iso, faremos unha breve incursión na teoría de punto fixo.

- **“Seguindo os pasos de Domingo Fontán”**, por Ana Suárez Gamarra.

Neste traballo analizamos o cálculo da altitude na Carta Xeométrica de Galicia de Domingo Fontán. Traballamos coa presión atmosférica, e estudamos como

o científico calculou a altitude de moitos cumios a partir de medicións desta variable. Os valores das altitudes obtidos, por interpolación e con diferentes fórmulas de Laplace, comparáronse cos datos proporcionados polos Sistemas de Información Xeográfica analizando a precisión dos mesmos.

Finalmente, realizamos medicións na estación Penagache, un vértice da triangulación fundamental de Fontán, que serán introducidas nas fórmulas que segundo a documentación dispoñible podería ter utilizado o matemático hai 200 anos, analizando e comparando os resultados obtidos.

- **“Rebozarse na lama”**, por Rodrigo Mariño Villar.

Ao longo dos anos puidestes asistir a moitas charlas de diferentes campos, non só dentro das matemáticas, senón de moitas outras disciplinas. A meirande parte delas, non deixan tempo para contar todos os problemas que van aparecendo e aos oradores límitámos a contar os resultados obtidos, facendo así que un traballo de meses quede limitado a 20 minutos. Na charla de hoxe contaremos unha forma de clasificar obxectos xeométricos a partir da súa estrutura alxébrica, facendo unha tradución a como clasificamos obxectos coñecidos, intentando que as matemáticas que subxacen sexan pouco mencionadas e brille a filosofía detrás destas.

- **“Un complemento ortogonal”**, por Daniel Cao Labora.

A interacción entre as matemáticas e a música é densa no tempo, pois vense producindo de xeito continuado dende a época das civilizacións clásicas ata os nosos días. Nesta charla faremos un breve percorrido histórico sobre este asunto, relatando curiosidades e formulando cuestións naturais que vencellan estas dúas áreas. Finalmente, e sen necesidade de requisitos previos, realizaremos unha demostración que amosa como estes dous mundos, aparentemente ortogonais, complementáanse á perfección.

- **“E se patentamos unha moeda como proba diagnóstica?”**, por Maribel Borrajo García.

“As probas rápidas mercadas a China non acadan nin o 30 % de sensibilidade”. Titulares coma este correron como a pólvora por todo o país entre finais de marzo e comezos de abril. O do 30 % soaba a pouco e mal, pero... que hai detrás? Sabemos que é iso da sensibilidade, como se calcula ou para que serve? E se a túa proba é positiva, sabemos que quere dicir?

A día de hoxe todos falamos de probas PCR, probas de antíxenos, probas de anticorpos ou de probas rápidas como se de pan ou patacas se tratase, pero... que tal se poñemos sobre a mesa un pouco de formalismo matemático? Nesta charla explicaremos as características máis relevantes á hora de determinar a validez e fiabilidade de calquera proba diagnóstica, e aprenderemos, coa Estatística por medio, a interpretar eses resultados.

- **“Bourbaki, o matemático poldavo”**, por Jesús Conde Lago

Procedente do Estado eslavo de Poldavia, de nome grego e nacionalidade francesa, Nicolas Bourbaki é un dos matemáticos máis influentes e prolíficos do século XX. É autor dunha das obras máis importantes das matemáticas: o extenso tratado *Eléments de Mathématique*. Nesta charla falaremos de quen e que é Bourbaki, de por que foi merecedor de ata cinco medallas Fields. Da súa verdadeira historia, pero tamén das moitas lendas que existen sobre el. Din que habelas hainas, e nós imos contarchas.

A información anterior, incluíndo diversos vídeos sobre as xornadas, está dispoñible en: <https://www.usc.gal/gl/servizos/snl/dinamizacion/habelashainas.html>.



# Agradecementos

O Comité Organizador do SII deste curso académico 2020/2021 quere agradecer a colaboración de todas e cada unha das persoas que fan posible que este seminario goce de tan boa saúde e continúe a ser un referente dentro e fóra da nosa Universidade. En primeiro lugar, gustaríanos mencionar ao Instituto de Matemáticas por facer posible este seminario, e en especial a Juan José Nieto Roig, Balbina Casas Méndez e Manuel Porto Canosa pola súa colaboración. Por suposto, tamén debemos agradecer ás e aos relatores desta edición do seminario, sen os cales nada disto sería posible. Grazas a: María Ferreiro Subrido, Fernando Castro Prado, Nerea González Barral, Javier Iglesias Pérez, Raúl Pino Velasco, Nerea Martínez López, Juan Manuel Lorenzo Naveiro, Carlos García Meixide, Patricia Guerra Balboa, Antonio Álvarez López, José Miguel Balado Alvés, Adrián González Maestro. Ademais, agradecemos ó noso compañeiro e antigo membro do seminario, Jorge Albella Rodríguez, a elaboración do prefacio destas actas. Un ano máis, estendemos os nosos agradecementos ás e aos relatores da terceira edición das xornadas de divulgación matemática Matemáticas: habelas hainas. Referímonos a: Jorge Rodríguez López, Ana Suárez Gamarra, Rodrigo Mariño Villar, Daniel Cao Labora, Maribel Borrajo García, Jesús Conde Lago. Tamén, a todas as entidades involucradas neste evento: o equipo decanal da Facultade de Matemáticas, o Servizo de Normalización Lingüística e a Comisión de Normalización Lingüística. Particularmente, a Isabel Vaquero Quintela pola súa participación activa nas xornadas coma representante do Servizo de Normalización Lingüística. Por último, tamén queremos agradecer o seu labor a Elena Vázquez Abal, quen foi de novo a responsable do deseño do cartel da xornada.

Santiago de Compostela, setembro de 2021

O Comité Organizador do SII

